ANALIZA U TEORIJI BROJEVA

Petar Orlić

21. ožujka 2025.

Osnovna ideja ovog predavanja je da, ako niz cijelih brojeva konvergira, tada je limes također cijeli broj. Štoviše, svi članovi niza osim njih konačno mnogo su jednaki limesu. To je jednostavna posljedica činjenice da se svaka dva različita cijela broja razlikuju za bar 1.
Ova tvrdnja se može činiti trivijalnom, ali ima svoje primjene. Radi ilustracije, navest ćemo nekoliko primjera. Podrazumijevat ćemo poznavanje osnovnih pojmova i rezultata u analizi (Stolz-Cesáro, L'Hospitalovo pravilo, Cauchyjev niz, ...).

Primjer 1. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a \neq 0$ i da je $an^2 + bn + c$ potpun kvadrat za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da postoje $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a = x^2, b = 2xy, c = y^2$.*

Dokaz. Neka je $an^2 + bn + c = x_n^2$ za $x_n \in \mathbb{Z}$. Jedna stvar koja nam može pasti na pamet je da niz

$$x_n - n\sqrt{a}$$

konvergira. To je istina (zašto?), ali to nije niz cijelih brojeva. Međutim, možemo promotriti niz

$$x_{n+1} - x_n.$$

Taj niz je konvergentan s limesom $\sqrt{a}$ (zašto?). Stoga je $a = x^2$ i

$$x_{n+1} = x_n + x, \forall n \geq M.$$

Stoga je $x_n = x_M + (n - M)x$ za sve $n \geq M$ pa dobivamo

$$x^2 n^2 + bn + c = x_n^2 = (x_M + (n - M)x)^2.$$

Ovaj izraz možemo promotriti kao kvadratni polinom u n pa mora vrijediti

$$b = 2x(x_M - Mx), c = (x_M - Mx)^2.$$

□

Ovaj problem je poseban slučaj sljedećeg općenitijeg i poznatijeg rezultata: ako je $f \in \mathbb{Z}[x]$ i $k \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sqrt[k]{f(n)} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$, tada postoji $g \in \mathbb{Q}[x]$ takav da je $f = g^k$.

Primjer 2. *Neka su $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^+$ takvi da bar jedan od njih nije cijeli broj. Dokaži da postoji beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ takvih da je*

$$M(n, \lfloor a_1 n \rfloor + \ldots + \lfloor a_k n \rfloor) = 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno i neka je (p_n) niz svih prostih brojeva. Tada za sve $n \geq M$ postoji $x_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\lfloor a_1 p_n \rfloor + \ldots + \lfloor a_k p_n \rfloor = x_n p_n.$$

Sad se nameće tvrdnja da je niz (x_n) konvergentan. To je istina jer niz

$$\frac{\lfloor a_1 p_n \rfloor + \ldots + \lfloor a_k p_n \rfloor}{p_n}$$

konvergira u $a_1 + \ldots + a_k$ (zašto?). To znači da je $x_n = a_1 + \ldots + a_k$ za sve $n \geq P$. Međutim, to je ekvivalentno tvrdnji da je

$$\{a_1 p_n\} + \ldots + \{a_k p_n\} = 0, \forall n \geq P, \text{ t.j.}$$

$$\{a_i p_n\} = 0, \forall i \in \{1, \ldots, k\}, n \geq P.$$

Iz toga se lako dokaže da su svi a_i prvo racionalni, a onda i cijeli brojevi. □

Primjer 3. *Neka su a, b prirodni brojevi veći od 1. Dokaži da postoji višekratnik od a koji u prikazu u bazi b sadrži sve znamenke $0, 1, \ldots, b-1$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka svi višekratnici a ne sadrže znamenku j. Kako vrijedi $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$, dovoljno je dokazati da suma svih recipročnih višekratnika a konvergira. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku znamenku $j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, postoji najviše $(b-1)^n$ brojeva s n znamenaka u bazi b koji ne sadrže znamenku j i svi ti brojevi su veći ili jednaki od b^{n-1}. Stoga je tražena suma jednaka najviše

$$\sum_{n \geq 1} \frac{b \cdot (b-1)^n}{b^{n-1}} = b^2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{b-1}{b} \right)^n .$$

Ova suma je geometrijski red i stoga konvergira pa smo dobili kontradikciju. □

Primjer 4. *Neka je $\pi(n)$ broj prostih brojeva manjih ili jednakih n. Dokaži da postoji beskonačno mnogo brojeva n takvih da $\pi(n) \mid n$.*

Rješenje ovog zadatka je direktna posljedica sljedeće leme. Njezina tvrdnja je možda teška za povjerovati, ali je istinita.

Lema 5. *Neka je (a_n) strogo rastuć niz prirodnih brojeva takav da je $\lim \frac{a_n}{n} = 0$. Tada niz $\left(\frac{n}{a_n}\right)$ sadrži sve prirodne brojeve.*

Dokaz. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Promotrimo skup

$$A = \left\{ n \geq 1 \mid \frac{a_{mn}}{mn} \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Taj skup sadrži broj 1 i ograničen je zbog $\lim \frac{a_n}{n} = 0$. Stoga u njemu postoji maksimalni element k. Ako je $\frac{a_{mk}}{mk} > \frac{1}{m}$, to znači da je $a_{mk} \geq k + 1$ pa vrijedi

$$\frac{a_{m(k+1)}}{m(k+1)} \geq \frac{a_{mk}}{m(k+1)} \geq \frac{1}{m},$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je k maksimalni element. Dakle, $\frac{a_{mk}}{mk} = \frac{1}{m}$ i dokazali smo da niz $\left(\frac{n}{a_n}\right)$ sadrži sve prirodne brojeve. □

Da bismo sada riješili zadatak, još samo trebamo dokazati da je $\lim \frac{\pi(n)}{n} = 0$. Ovo je vrlo poznato i npr. slijedi iz tvrdnje

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}.$$

Još jedan način na koji se to može dokazati je pomoću tvrdnje $\prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Domaća zadaća

Treba točno riješiti barem 7 zadataka. Zadaće predajte do petka 11. travnja 2025.

1. Dokaži $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ i pomoću te tvrdnje dokaži $\lim \frac{\pi(n)}{n} = 0$ (može i drugačije, ali bez korištenja rezultata tipa $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$).

2. Dokaži da ne postoje $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$ stupnja 2 takvi da za sve $x, y \in \mathbb{Z}$ postoji $z \in \mathbb{Z}$ takav da je $P(x) + Q(y) = R(z)$.

3. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a \cdot 2^n + b$ potpun kvadrat za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je $a = 0$.

4. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ i (a_n) strogo rastuć niz prirodnih brojeva takav da je $a_n \leq f(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je skup prostih brojeva koji dijele bar jedan član niza (a_n) beskonačan.

5. Nađi sve $f \in \mathbb{R}[x]$ takve da je za sve $n \in \mathbb{N}$ oblika $11 \ldots 1$ (t.j. koji u dekadskom zapisu imaju samo jedinice) broj $f(n)$ prirodan broj istog oblika.

6. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ normiran (t.j. vodećeg koeficijenta 1) takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ jednadžba $f(x) = 2^n$ ima bar jedno rješenje u $\mathbb{N}$. Dokaži da je f linearan polinom.

7. Neka je (a_n) strogo rastuć niz prirodnih brojeva takav da vrijedi
$$a_n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}, \forall n \geq 2025.$$
Dokaži da postoji M takav da je $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}, \forall n \geq M$.

8. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ stupnja k takav da je $\sqrt[k]{f(n)} \in \mathbb{Z}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da postoje $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $f(x) = (ax + b)^k$ bez korištenja općenitije tvrdnje iza Primjera 1.

9. Neka su $a, b, c > 1$ prirodni brojevi takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $a^k + b^k = 2c^n$. Dokaži da je $a = b$.

10. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ takav da postoji niz međusobno različitih cijelih brojeva (a_n) takav da je $p(a_1) = 0, p(a_2) = a_1, p(a_3) = a_2, \ldots$ Odredi stupanj polinoma f.

11. Neka su $f, q \in \mathbb{R}[x]$ stupnja 2 sa sljedećim svojstvom: ako je $f(x) \in \mathbb{Z}$ za neki $x \in \mathbb{R}$, tada je $g(x) \in \mathbb{Z}$. Dokaži da je $g(x) = mf(x) + n$ za neke $m, n \in \mathbb{Z}$.

12. Neka je $b > 5$ prirodan broj. Definirajmo broj x_n sa zapisom
$$x_n = \underbrace{11 \ldots 1}_{n-1}\underbrace{22 \ldots 2}_{n}5$$
u bazi b. Dokaži da je x_n potpun kvadrat ako i samo ako je $b = 10$.

13. Ako je $a \in \mathbb{R}^+$ takav da su svi brojevi $1^a, 2^a, 3^a, \ldots$ cijeli, dokaži da je a također cijeli broj.

14. Nađi sve $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ takve da je $P(x)^2 = (x^2 + 6x + 10)Q(x) - 1$.