UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Dokažite da za sve podskupove A i B skupa U vrijedi

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

(b) (2 boda) Vrijedi li

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

za sve sudove A i B? Odgovor obrazložite.

(c) (1 bod) Negirajte sljedeći sud:

$$x \in A \cup B \text{ ako i samo ako je } x \in A \text{ ili } x \in B.$$

Rješenje.

(a) $x \in A \cap (A \cup B) \iff x \in A \wedge x \in A \cup B \iff x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \iff x \in A$

(b) Koristimo tablicu istinitosti.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Odgovor je da.

(c)

$$(\exists x)(x \in A \cup B \text{ i } x \notin A \text{ i } x \notin B)$$

ili

$$(\exists x)((x \in A \text{ ili } x \in B) \text{ i } x \notin A \cup B).$$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Ispitajte parnost / neparnost razlike i produkta dviju neparnih funkcija.

(b) (3 boda) Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana sa $f(x) = \operatorname{sh} x$ je bijekcija. Odredite joj inverznu funkciju.

Rješenje.

(a) Neka su f i g dvije neparne funkcije. Za njihovu razliku imamo

$$(f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) = (f-g)(x), \quad \forall x,$$

pa je $f - g$ neparna. S druge strane, za njihov produkt imamo

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x)) = (fg)(x), \quad \forall x,$$

pa je fg parna funkcija.

(b) Neka je $y \in \mathbb{R}$. Tada je

$$y = \operatorname{sh} x \iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Supstitucija $t = e^x > 0$ daje

$$t^2 - 2yt - 1 = 0,$$

a rješenja te kvadratne jednadžbe su $t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Međutim, $t_2 < 0$, pa je $t = y + \sqrt{y^2+1}$. Dakle,

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

i konačno $\ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Inverzna funkcija $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana je sa

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaki realan broj vrijedi: ako postoje dva prirodna broja čiji je zbroj strogo veći od njega, tada postoje dva cijela broja čiji je produkt strogo veći od njega.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall x \in \mathbb{R})(((\exists n, m \in \mathbb{N})(n + m > x)) \Longrightarrow ((\exists p, q \in \mathbb{Z})(pq > x))).$$

Ova tvrdnja je istinita jer za svaki realan broj x možemo osigurati da desna strana implikacije bude istinita, odnosno možemo pronaći cijele brojeve p i q takve da je $pq > x$ (npr. možemo uzeti p i q da budu bilo koja dva cijela broja veća od x).

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall x \in \mathbb{R})(((\exists p, q \in \mathbb{Z})(pq > x)) \Longrightarrow ((\exists n, m \in \mathbb{N})(n + m > x))),$$

ili riječima:

Za svaki realan broj vrijedi: ako postoje dva cijela broja čiji je produkt strogo veći od njega, tada postoje dva prirodna broja čiji je zbroj strogo veći od njega.

Ova tvrdnja je također istinita, jer opet možemo postići da za svaki x implikacija bude istinita. Štoviše, možemo postići da desna strana implikacije bude istinita, pa će onda i sama implikacija biti takva. Na primjer, ako uzmemo prirodne brojeve n i m veće od x tada će nužno biti $n + m > x$.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall x \in \mathbb{R})(((\forall p, q \in \mathbb{Z})(pq \leq x)) \Longrightarrow ((\forall n, m \in \mathbb{N})(n + m \leq x))),$$

ili riječima:

Za svaki realan broj vrijedi: ako je produkt svaka dva cijela broja manji ili jednak od tog broja, tada je zbroj svaka dva prirodna broja manji ili jednak od tog broja.

Budući da je originalna tvrdnja bila istinita, onda takav mora biti i obrat po kontrapoziciji.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists x \in \mathbb{R})(((\forall n, m \in \mathbb{N})(n + m \leq x)) \wedge ((\exists p, q \in \mathbb{Z})(pq > x))),$$

ili riječima:

Postoji realan broj broj veći ili jednak od zbroja svaka dva prirodna broja, te takav da postoje dva cijela broja čiji je produkt veći od tog broja.

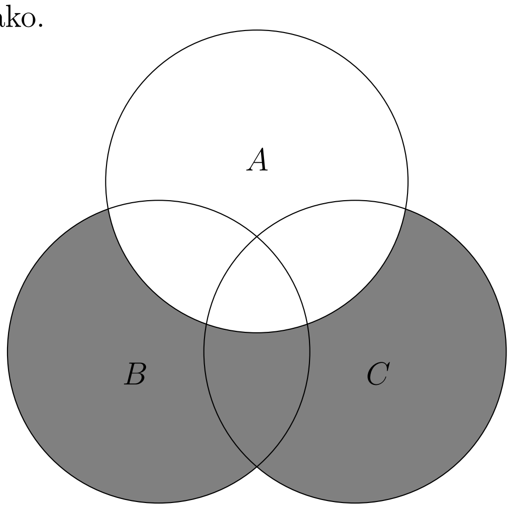
Originalna tvrdnja je bila istinita, pa je onda njena negacija neistinita.

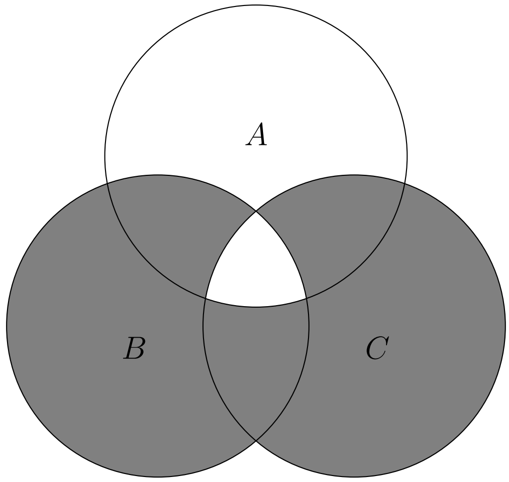
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus A)$ i $(B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $(B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus A)$ i $(B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $(B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus A) \subseteq (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$, te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito. Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x \in (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus A)$. Tada je $x \in (B \setminus (A \cup C))$ ili $x \in C \setminus A$.

Ako je $x \in (B \setminus (A \cup C))$, tada je $x \in B$ te $x \notin A \cup C$. Zaključujemo da je $x \notin A$ i $x \notin C$, pa je u svakom slučaju $x \notin A \cap B \cap C$. S druge strane, kako je $x \in B$, slijedi da je i $x \in B \cup C$, pa zaključujemo da je $x \in (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Promotrimo sada drugi slučaj, tj. kada je $x \in C \setminus A$. U tom je slučaju $x \in C$ i $x \notin A$. Kako je $x \in C$, slijedi da je i $x \in B \cup C$, a kako je $x \notin A$, slijedi da je $x \notin A \cap B \cap C$. Opet zaključujemo da je $x \in (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Ovime smo dokazali jednu inkluziju.

Obratna inkluzija ne vrijedi, kao što se može vidjeti npr. ako uzmemo $A = B = \{1\}$ i $C = \{2\}$.

Postoje primjeri za koji vrijede i jedna i druga inkluzija, npr. $A = B = C = \emptyset$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$a \ \rho \ b \quad \iff \quad (\exists c \in \mathbb{Z})(a - b = c^2).$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

Rješenje.
Refleksivnost: Za svaki $a \in \mathbb{Z}$ je $a - a = 0^2$, to jest $a \ \rho \ a$. Prema tome, ρ je refleksivna.
Simetričnost: Relacija nije simetrična. Primjerice, za $a = 5$ i $b = 1$ imamo $a - b = 4 = 2^2$ (dakle $a \ \rho \ b$), ali $b \not\rho \ a$ jer $1 - 5 = -4$ nije kvadrat cijelog broja.
Tranzitivnost: Neka je $a \ \rho \ b$ i $b \ \rho \ c$, tj. pretpostavimo da postoje $p, q \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a - b = p^2$ i $b - c = q^2$. Tada je $a - c = p^2 + q^2$, a to ne mora biti kvadrat cijelogog broja. Primjerice, uzmemo li $a = 2$, $b = 1$ i $c = 0$, vidimo da vrijedi $a \ \rho \ b$ i $b \ \rho \ c$, ali $a - c = 2$, dakle $a \not\rho \ b$. Zaključujemo da ρ nije tranzitivna.
Antisimetričnost: Neka je $a \ \rho \ b$ i $b \ \rho \ a$. To znači da postoji $c \in \mathbb{Z}$ takav da je $a - b = c^2$, ali da je pritom i $-c^2$ potpun kvadrat. To je moguće samo ako je $c = 0$, to jest ako je $a = b$. Zaključujemo da $a \ \rho \ b$ i $b \ \rho \ a$ povlači $a = b$, tj. ρ je antisimetrična.
ρ nije ni parcijalni uređaj, ni relacija ekvivalencije.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 6. Funkcija $f\colon \langle 2, +\infty\rangle \to \langle -4, +\infty\rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = e^{x^4-4x^2} - 3.$$

(a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f.

(b) (2 boda) Neka je $g\colon \langle 2, +\infty\rangle \to \langle -4, +\infty\rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = e^{x^2-4} - 3$. Pronađite funkciju h takvu da je $f = g \circ h$. Je li funkcija h rastuća?

Rješenje.

(a) Pretpostavimo da za neke $x, y \in \langle 2, +\infty\rangle$ imamo $f(x) = f(y)$. Tada je

$$e^{x^4-4x^2} - 3 = e^{y^4-4y^2} - 3 \iff e^{x^4-4x^2} = e^{y^4-4y^2} \iff x^4 - 4x^2 = y^4 - 4y^2 \iff (x^2-y^2)(x^2+y^2-4) = 0.$$

Dakle, ili je $x^2 = y^2$ ili je $x^2 + y^2 = 4$. Ako je $x^2 = y^2$ tada je nužno $x = y$ jer smo pretpostavili da su x i y pozitivni. S druge strane, budući da je $x, y > 2$, slijedi da je $x^2 + y^2 > 8$ pa se drugi slučaj $(x^2 + y^2 = 4)$ niti ne može dogoditi. Dakle, zaključak je da je $x = y$, pa je f injekcija.

Budući da za svaki x iz domene imamo $e^{x^4-4x^2} > 0$, slijedi da je $f(x) > -3$. Zaključujemo da ne postoji x iz domene takav da je npr. $f(x) = -3.5$, pa f nije surjekcija.

(b) Uočimo da je

$$f(x) = e^{x^4-4x^2} - 3 = e^{x^4-4x^2+4-4} - 3 = e^{(x^2-2)^2-4} - 3 = g(x^2 - 2),$$

pa ako uzmemo funkciju $h\colon \langle 2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ takvu da je $h(x) = x^2 - 2$ dobivamo da je $f = g \circ h$. Budući da je

$$x > y > 2 \Longrightarrow x^2 > y^2 \Longrightarrow x^2 - 2 > y^2 - 2 \Longrightarrow h(x) > h(y),$$

slijedi da je h strogo rastuća funkcija.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = [\log_3(3x+1)]^2 + 4\log_3(3x+1) + 2$.

(a) Odredite prirodnu domenu funkcije f.

(b) Odredite skup $f([0, \frac{26}{3}])$.

(c) Odredite skup $f^{-1}(\langle -\infty, -1\rangle)$.

Rješenje.

(a) Jedini uvjet je zadan činjenicom da je domena funkcije $\log_3$ skup $\mathbb{R}^+$. Odavde dobivamo $3x+1>0$, to jest $x > \frac{-1}{3}$. Drugim riječima, $\mathcal{D}_f = \langle \frac{-1}{3}, \infty\rangle$.

(b) Uočimo da je $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pri čemu je

$$f_1(x) = 3x+1, \quad f_2(x) = \log_3(x), \quad f_3(x) = x^2 + 4x + 2.$$

Sada računamo:

$$f_1\left(\left[0, \frac{26}{3}\right]\right) = [1, 27], \quad f_2([1,27]) = [0,3], \quad f_3([0,3]) = [2, 23]$$

Odavde je $f([0, \frac{26}{3}]) = [2, 23]$.

(c) Opet koristimo rastav $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}(A) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(A)))$. Računamo:

$$f_3^{-1}(\langle -\infty, -1\rangle) = \langle -3, -1\rangle, \quad f_2^{-1}(\langle -3, -1\rangle) = \left\langle \frac{1}{27}, \frac{1}{3}\right\rangle, \quad f_3^{-1}\left(\left\langle \frac{1}{27}, \frac{1}{3}\right\rangle\right) = \left\langle \frac{-26}{81}, \frac{-2}{9}\right\rangle.$$

Zaključujemo $f^{-1}(\langle -\infty, -1\rangle) = \langle \frac{-26}{81}, \frac{-2}{9}\rangle$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Dokažite da za sve podskupove A i B skupa U vrijedi

$$B \cup (A \cap B) = B.$$

(b) (2 boda) Vrijedi li

$$B \vee (A \wedge B) \equiv B$$

za sve sudove A i B? Odgovor obrazložite.

(c) (1 bod) Negirajte sljedeći sud:

$$x \in A \cap B \text{ ako i samo ako je } x \in A \text{ i } x \in B.$$

Rješenje.

(a) $x \in B \cup (A \cap B) \iff x \in B \vee (x \in A \cap B) \iff x \in B \vee (x \in A \wedge x \in B) \iff x \in B$

(b) Koristimo tablicu istinitosti.

A	B	$A \wedge B$	$B \vee (A \wedge B)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Odgovor je da.

(c)

$$(\exists x)(x \in A \cap B \text{ i } (x \notin A \text{ ili } x \notin B))$$

ili

$$(\exists x)(x \in A \text{ i } x \in B \text{ i } x \notin A \cap B).$$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Ispitajte parnost / neparnost zbroja i kvocijenta dviju neparnih funkcija.

(b) (3 boda) Funkcija $f\colon [0,\infty\rangle \to [1,\infty\rangle$ zadana sa $f(x) = \operatorname{ch} x$ je bijekcija. Odredite joj inverznu funkciju.

Rješenje.

(a) Neka su f i g dvije neparne funkcije. Za njihov zbroj imamo

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x)+g(x)) = (f+g)(x), \quad \forall x,$$

pa je $f+g$ neparna. S druge strane, za njihov kvocijent imamo

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x), \quad \forall x,$$

pa je $\frac{f}{g}$ parna funkcija.

(b) Neka je $y \in [1,\infty\rangle$. Tada je

$$y = \operatorname{ch} x \iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff 2y = e^x + e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Supstitucija $t = e^x \geq e^0 = 1$ daje

$$t^2 - 2yt + 1 = 0,$$

a rješenja te kvadratne jednadžbe su $t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$. Uočimo da za $y = 1$ imamo $t_1 = t_2$. S druge strane

$$\begin{aligned} y > 1 &\Longrightarrow 2y > 2 \Longrightarrow -2y + 1 < -1 \Longrightarrow y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1 \Longrightarrow (y-1)^2 < y^2 - 1 \\ &\Longrightarrow y - 1 < \sqrt{y^2-1} \Longrightarrow y - \sqrt{y^2-1} < 1 \Longrightarrow t_2 < 1. \end{aligned}$$

Dakle,

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}$$

i konačno $\ln(y + \sqrt{y^2-1})$. Inverzna funkcija $f^{-1}\colon [1,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ dana je sa

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

za svaki $x \in [1,\infty\rangle$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaki realan broj vrijedi: ako postoje dva prirodna broja čiji je produkt strogo veći od njega, tada postoje dva cijela broja čiji je zbroj strogo veći od njega.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall x \in \mathbb{R})(((\exists n, m \in \mathbb{N})(nm > x)) \Longrightarrow ((\exists p, q \in \mathbb{Z})(p + q > x))).$$

Ova tvrdnja je istinita jer za svaki realan broj x možemo osigurati da desna strana implikacije bude istinita, odnosno možemo pronaći cijele brojeve p i q takve da je $p + q > x$ (npr. možemo uzeti p i q da budu bilo koja dva pozitivna cijela broja veća od x).

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall x \in \mathbb{R})(((\exists p, q \in \mathbb{Z})(p + q > x)) \Longrightarrow ((\exists n, m \in \mathbb{N})(nm > x))),$$

ili riječima:

Za svaki realan broj vrijedi: ako postoje dva cijela broja čiji je zbroj strogo veći od njega, tada postoje dva prirodna broja čiji je produkt strogo veći od njega.

Ova tvrdnja je također istinita, jer opet možemo postići da za svaki x implikacija bude istinita. Štoviše, možemo postići da desna strana implikacije bude istinita, pa će onda i sama implikacija biti takva. Na primjer, ako uzmemo prirodne brojeve n i m veće od x tada će nužno biti $nm > x$.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall x \in \mathbb{R})(((\forall p, q \in \mathbb{Z})(p + q \leq x)) \Longrightarrow ((\forall n, m \in \mathbb{N})(nm \leq x))),$$

ili riječima:

Za svaki realan broj vrijedi: ako je zbroj svaka dva cijela broja manji ili jednak od tog broja, tada je produkt svaka dva prirodna broja manji ili jednak od tog broja.

Budući da je originalna tvrdnja bila istinita, onda takav mora biti i obrat po kontrapoziciji.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists x \in \mathbb{R})(((\forall n, m \in \mathbb{N})(nm \leq x)) \wedge ((\exists p, q \in \mathbb{Z})(p + q > x))),$$

ili riječima:

Postoji realan broj broj veći ili jednak od produkta svaka dva prirodna broja, te takav da postoje dva cijela broja čiji je zbroj veći od tog broja.

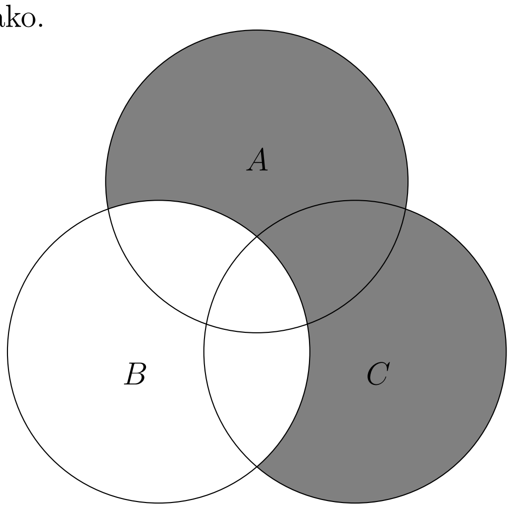
Originalna tvrdnja je bila istinita, pa je onda njena negacija neistinita.

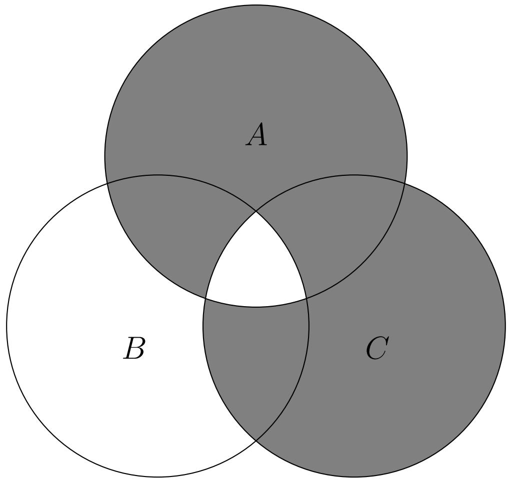
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(C \setminus (B \cup A)) \cup (A \setminus B)$ i $(C \cup A) \setminus (A \cap B \cap C)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $(C \setminus (B \cup A)) \cup (A \setminus B)$ i $(C \cup A) \setminus (A \cap B \cap C)$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $(C \setminus (B \cup A)) \cup (A \setminus B) \subseteq (C \cup A) \setminus (A \cap B \cap C)$, te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito. Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x \in (C \setminus (B \cup A)) \cup (A \setminus B)$. Tada je $x \in (C \setminus (B \cup A))$ ili $x \in A \setminus B$.

Ako je $x \in (C \setminus (B \cup A))$, tada je $x \in C$ te $x \notin B \cup A$. Zaključujemo da je $x \notin B$ i $x \notin A$, pa je u svakom slučaju $x \notin A \cap B \cap C$. S druge strane, kako je $x \in C$, slijedi da je i $x \in C \cup A$, pa zaključujemo da je $x \in (C \cup A) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Promotrimo sada drugi slučaj, tj. kada je $x \in A \setminus B$. U tom je slučaju $x \in A$ i $x \notin B$. Kako je $x \in A$, slijedi da je i $x \in C \cup A$, a kako je $x \notin B$, slijedi da je $x \notin A \cap B \cap C$. Opet zaključujemo da je $x \in (C \cup A) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Ovime smo dokazali jednu inkluziju.

Obratna inkluzija ne vrijedi, kao što se može vidjeti npr. ako uzmemo $B = C = \{1\}$ i $A = \{2\}$.

Postoje primjeri za koji vrijede i jedna i druga inkluzija, npr. $A = B = C = \emptyset$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$a \ \rho \ b \quad \iff \quad (\exists d \in \mathbb{N}, d > 1)(d|a \ \wedge \ d|b).$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

Rješenje.
Refleksivnost: Uočimo da za svaki $a \in \mathbb{Z}$ osim 1 i -1 vrijedi $a \ \rho \ a$ – očiti izbor djelitelja d je upravo $|a|$ (ili bilo koji prirodni broj $d > 1$ ako je $a = 0$).
Ipak, relacija nije refleksivna jer npr. $1 \not\rho \ 1$ (jedini prirodni djelitelj od 1 je 1).
Simetričnost: Relacija je trivijalno simetrična jer, ako $d|a \wedge d|b$, onda i $d|b \wedge d|a$.
Tranzitivna: Relacija nije tranzitivna; možemo naći puno trojki a, b, c takvih da vrijedi $a \ \rho \ b$ i $b \ \rho \ c$, ali $a \not\rho \ c$. Konkretno, možemo uzeti $a = 2, b = 6, c = 3$.
Antisimetričnost: Relacija očito nije antisimetrična. Za kontraprimjer možemo uzeti bilo koji par različitih brojeva koji su u relaciji (jer je relacija simetrična), npr. $a = 2, b = 4$. Zaključujemo da ρ nije ni relacija ekvivalencije, niti parcijalni uređaj.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 6. Funkcija $f\colon \langle 3, +\infty\rangle \to \langle -4, +\infty\rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = e^{x^4-6x^2} - 3.$$

(a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f.

(b) (2 boda) Neka je $g\colon \langle 6, +\infty\rangle \to \langle -4, +\infty\rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = e^{x^2-9} - 3$. Pronađite funkciju h takvu da je $f = g \circ h$. Je li funkcija h rastuća?

Rješenje.

(a) Pretpostavimo da za neke $x, y \in \langle 3, +\infty\rangle$ imamo $f(x) = f(y)$. Tada je

$$e^{x^4-6x^2} - 3 = e^{y^4-6y^2} - 3 \iff e^{x^4-6x^2} = e^{y^4-6y^2} \iff x^4 - 6x^2 = y^4 - 6y^2 \iff (x^2-y^2)(x^2+y^2-6) = 0.$$

Dakle, ili je $x^2 = y^2$ ili je $x^2 + y^2 = 6$. Ako je $x^2 = y^2$ tada je nužno $x = y$ jer smo pretpostavili da su x i y pozitivni. S druge strane, budući da je $x, y > 3$, slijedi da je $x^2 + y^2 > 18$ pa se drugi slučaj $(x^2 + y^2 = 6)$ niti ne može dogoditi. Dakle, zaključak je da je $x = y$, pa je f injekcija.

Budući da za svaki x iz domene imamo $e^{x^4-6x^2} > 0$, slijedi da je $f(x) > -3$. Zaključujemo da ne postoji x iz domene takav da je npr. $f(x) = -3.5$, pa f nije surjekcija.

(b) Uočimo da je

$$f(x) = e^{x^4-6x^2} - 3 = e^{x^4-6x^2+9-9} - 3 = e^{(x^2-3)^2-9} - 3 = g(x^2 - 3),$$

pa ako uzmemo funkciju $h\colon \langle 3, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ takvu da je $h(x) = x^2 - 3$ dobivamo da je $f = g \circ h$. Budući da je

$$x > y > 3 \implies x^2 > y^2 \implies x^2 - 3 > y^2 - 3 \implies h(x) > h(y),$$

slijedi da je h strogo rastuća funkcija.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = [\log_2(2x+1)]^2 - 2\log_2(2x+1) + 2$.

(a) Odredite prirodnu domenu funkcije f.

(b) Odredite skup $f([0, \frac{7}{2}])$.

(c) Odredite skup $f^{-1}(\langle -\infty, 10\rangle)$.

Rješenje.

(a) Jedini uvjet je zadan činjenicom da je domena funkcije $\log_2$ skup $\mathbb{R}^+$. Odavde dobivamo $2x+1>0$, to jest $x > \frac{-1}{2}$. Drugim riječima, $\mathcal{D}_f = \langle \frac{-1}{2}, \infty\rangle$.

(b) Uočimo da je $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pri čemu je

$$f_1(x) = 2x+1, \quad f_2(x) = \log_2(x), \quad f_3(x) = x^2 - 2x + 2.$$

Sada računamo:

$$f_1\left(\left[0, \frac{7}{2}\right]\right) = [1,8], \quad f_2([1,8]) = [0,3], \quad f_3([0,3]) = [1,5].$$

Odavde je $f([0, \frac{7}{2}]) = [1,5]$.

(c) Opet koristimo rastav $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}(A) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(A)))$. Računamo:

$$f_3^{-1}(\langle -\infty, 10\rangle) = \langle -2, 4\rangle, \quad f_2^{-1}(\langle -2, 4\rangle) = \left\langle \frac{1}{4}, 16 \right\rangle, \quad f_3^{-1}\left(\left\langle \frac{1}{4}, 16\right\rangle\right) = \left\langle \frac{-3}{8}, \frac{15}{2}\right\rangle.$$

Zaključujemo $f^{-1}(\langle -\infty, 10\rangle) = \langle \frac{-3}{8}, \frac{15}{2}\rangle$.