UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Iskažite aksiom matematičke indukcije.

(b) (2 boda) Iskažite Arhimedov aksiom.

(c) (1 bod) Zadan je realan broj $\beta = 0.2223509776349234\ldots$ Odredite decimalan broj koji ga aproksimira s točnošću 10^{-12}.

Rješenje.

(a) Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $1 \in S$ i da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da ako je $n \in S$, tada je i $n + 1 \in S$. Tada je $S = \mathbb{N}$.

(b) Neka su $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot x > y$.

(c) Očito je $|\beta - 0.222350977634923| < 10^{-12}$, pa je 0.222350977634923 mogući izbor traženog decimalnog broja.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Odredite Taylorov razvoj polinoma $x^7 - x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 + x + 2$ oko $\alpha = 1$.

(b) (3 boda) Dokažite da broj $\sqrt[11]{2} + 1$ nije racionalan.

Rješenje.

(a) Taylorov razvoj određujemo uzastopnom primjenom Hornerovog algoritma:

α	1	0	-1	1	-1	3	1	2
1	1	1	0	1	0	3	4	6
1	1	2	2	3	3	6	10	
1	1	3	5	8	11	17		
1	1	4	9	17	28			
1	1	5	14	31				
1	1	6	20					
1	1	7						

Odavde čitamo:

$$f(x) = (x-1)^7 + 7(x-1)^6 + 20(x-1)^5 + 31(x-1)^4 + 28(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 10(x-1) + 6$$

(b) *Prvo rješenje.* Označimo s $q = \sqrt[11]{2} + 1$. Vidimo da je tada $q - 1 = \sqrt[11]{2}$ nultočka polinoma $x^{11} - 2$.

Ako je racionalan broj $\frac{m}{n}$ (uz $\mathrm{M}(m,n) = 1$) nultočka polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, onda znamo da brojnik (m) dijeli slobodni, a nazivnik (n) vodeći koeficijent polinoma.

Prema tome, kandidati za racionalne nultočke polinoma $x^{11} - 2$ brojevi $\pm 1, \pm 2$. Kako niti jedan od tih brojeva nije jednak $\sqrt[11]{2}$, zaključujemo da $\sqrt[11]{2}$ nije racionalan broj. Odavde slijedi da ni $\sqrt[11]{2} + 1$ nije racionalan, što je trebalo dokazati.

Drugo rješenje. Pretpostavimo da je $q = \sqrt[11]{2} + 1$ racionalan. Tada je i $q - 1 = \sqrt[11]{2}$ racionalan pa ga možemo zapisati kao razlomak skraćen do kraja, dakle

$$\sqrt[11]{2} = \frac{m}{n}, \quad \text{za neke } m, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}(m,n) = 1.$$

Odavde je

$$2n^{11} = m^{11}$$

pa zaključujemo: budući da 2 dijeli lijevu stranu gornje jednakosti, mora dijeliti i desnu. To znači $2|m^{11}$, a zbog toga i $2|m$ (jer je 2 prost).
To možemo zapisati kao $m = 2k$ pa jednakost postaje

$$2n^{11} = 2^{11}k^{11}, \quad \text{to jest} \quad n^{11} = 2^{10}k^{11}.$$

Sada na isti način kao što smo zaključili $2|m$ vidimo da vrijedi i $2|n$.

Time smo dobili $2|n$ i $2|m$, no to je kontradikcija s $\mathrm{M}(m,n) = 1$. Zaključujemo da je pretpostavka bila kriva, to jest da $\sqrt[11]{2} + 1$ nije racionalan, što je trebalo pokazati.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 3. (5 bodova) Neka je s suma koeficijenata polinoma $p(x) = (x^3 + 3x^2 - 3x + 2)^{2017}$. Odredite ostatke pri dijeljenju broja s sa 28 i 18.

Rješenje. Poznato je da je suma koeficijenata polinoma p jednaka $p(1)$, pa je stoga

$$s = p(1) = (1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2)^{2017} = 3^{2017}.$$

Budući da je $3^3 = 27 \equiv -1 \pmod{28}$, dobivamo da je

$$3^{2017} = (3^3)^{672} \cdot 3 \equiv (-1)^{672} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{28},$$

pa je ostatak pri dijeljenju broja s sa 28 jednak 3.

S druge strane, uočimo da je $3^3 \equiv 3^2 \pmod{18}$, pa množenjem obje strane s proizvoljnom potencijom 3^n $(n \geq 0)$ dobivamo da je

$$3^{n+3} \equiv 3^{n+2} \pmod{18}, \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

Sada možemo zaključiti da je

$$3^{2017} \equiv 3^{2016} \equiv 3^{2015} \equiv \cdots \equiv 3^2 \pmod{18},$$

pa je ostatak pri dijeljenju broja s s 18 jednak 9.

Alternativno rješenje drugog dijela (Lovro Čupić). Broj $s = 3^{2017}$ je očito djeljiv s 9 pa pri dijeljenju s 18 daje ili ostatak 0 ili ostatak 9. Međutim, kada bi davao ostatak 0, slijedilo bi da je paran, što nije slučaj. Zaljučujemo da s pri dijeljenju s 18 daje ostatak 9.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 4. (5 bodova) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva za koji je $a_1 = a_2 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + 12a_{n-1}$ za sve $n \geq 2$. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $a_n \leq 4^n - 5$.

Rješenje. Uočimo da je $a_1 = 1 > 4^1 - 5 = -1$. Matematičkom indukcijom ćemo dokazati da jedino za $n = 1$ nejednakost iz teksta zadatka ne vrijedi. Uočimo da je nejednakost trivijalno istinita za $n = 2$ i $n = 3$ (baza indukcije). Doista,

$$a_2 = 1 \leq 4^2 - 5 = 11 \quad \text{i} \quad a_3 = 1 + 12 \cdot 1 = 13 \leq 4^3 - 5 = 59.$$

Prepostavimo da je tvrdnja istinita za brojeve $2, \ldots, n$. Za a_{n+1} tada imamo ogradu

$$a_{n+1} = a_n + 12a_{n-1} \leq (4^n - 5) + 12 \cdot (4^{n-1} - 5) = (4^n + 12 \cdot 4^{n-1}) - 65 < 4^{n+1} - 5,$$

pa tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Zaključak je da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \geq 2$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 5. (5 bodova) Zadan je broj $m \in \mathbb{N}$. Ako je $y \in \mathbb{N}$ takav da je $m^3 - y^3$ prost, odredite y (tj. izrazite ga preko m).

Rješenje. Uočimo da se izraz $m^3 - y^3$ faktorizira kao $(m - y)(m^2 + my + y^2)$. Prema tome, $m^3 - y^3$ ne može biti prost osim ako je jedan od ovih faktora jednak 1. Kako su m i y prirodni, vidimo da je $m^2 + my + y^2 > 1$ pa je ovo jedino moguće ako je $m - y = 1$, to jest $y = m - 1$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 6. (5 bodova) Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ pri dijeljenju s x^2 daje ostatak $2x+5$, a pri dijeljenju s $x-1$ daje ostatak 3. Odredite ostatak koji f daje pri dijeljenju s $x^3 - x^2$.

Rješenje. Prvi uvjet možemo pisati kao $f(x) = x^2 g(x) + 2x + 5$ za neki $g \in \mathbb{R}[x]$, a drugi kao $f(1) = 3$. Trebamo odrediti ostatak pri dijeljenju s $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.
Sada koristimo teorem o dijeljenju s ostatkom: postoje $h \in \mathbb{R}[x]$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$f(x) = (x-1)x^2 h(x) + ax^2 + bx + c.$$

Uočimo da je $(x-1)x^2 h(x) + ax^2$ djeljivo s x^2 pa iz prvog uvjeta čitamo $b = 2, c = 5$. Preostaje uvrstiti $x = 1$; time dobivamo $3 = f(1) = a + b + c = a + 7$, dakle $a = -4$.

Prema tome, ostatak od f pri dijeljenju s $x^3 - x^2$ je $-4x^2 + 2x + 5$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 7. (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x+3}{x^3+x^2+2x+8}.$$

Rješenje. Najprije trebamo faktorizirati nazivnik; da bismo to napravili, pokušamo naći neku nultočku polinoma $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 8$. Vidimo da su jedine moguće racionalne nultočke cjeli brojevi koji dijele 8, to jest $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Isprobavanjem vidimo da je $g(-2) = 0$, to jest da $(x+2)$ dijeli $g(x)$. Dijeljenjem polinoma dolazimo do faktorizacije $g(x) = (x+2)(x^2 - x + 4)$. Ovdje je diskriminanta kvadratnog faktora negativna, pa je time g faktoriziran do kraja.

Sada znamo da vrijedi

$$\frac{x+3}{x^3+x^2+2x+8} = \frac{x+3}{(x+2)(x^2-x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-x+4}$$

za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$. Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$\frac{x+3}{(x+2)(x^2-x+4)} = \frac{(A+B)x^2 + (-A+2B+C)x + (4A+2C)}{(x+2)(x^2-x+4)}$$

pa uspoređivanjem koeficijenata dolazimo do sustava

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -A + 2B + C &= 1 \\ 4A + 2C &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $A = \frac{1}{10}, B = \frac{-1}{10}, C = \frac{13}{10}$.
Time smo dobili rastav

$$\frac{x+3}{x^3+x^2+2x+8} = \frac{\frac{1}{10}}{x+2} + \frac{\frac{-1}{10}x + \frac{13}{10}}{(x^2-x+4)}.$$

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Iskažite teorem o dijeljenju s ostatkom.

(b) (2 boda) Iskažite aksiom potpunosti.

(c) (1 bod) Zadan je realan broj $\alpha = 0.233409876348353\ldots$ Odredite decimalan broj koji ga aproksimira s točnošću 10^{-12}.

Rješenje.

(a) Neka je $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada postoje jedinstveni $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ takvi da vrijedi $m = n \cdot q + r$.

(b) Neka su A i B neprazni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ sa svojstvom $a \leq b$ za svaki $a \in A$ i svaki $b \in B$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $a \leq c \leq b$ za svaki $a \in A$ i svaki $b \in B$.

(c) Očito je $|\alpha - 0.23340987634835| < 10^{-12}$, pa je 0.23340987634835 mogući izbor traženog decimalnog broja.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Odredite Taylorov razvoj polinoma $x^7 - 2x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2$ oko $\alpha = -1$.

(b) (3 boda) Dokažite da broj $\sqrt[9]{3} - 1$ nije racionalan.

Rješenje.

(a) Taylorov razvoj određujemo uzastopnom primjenom Hornerovog algoritma:

α	1	0	-2	1	1	3	1	2
-1	1	-1	-1	2	-1	4	-3	5
-1	1	-2	1	1	-2	6	-9	
-1	1	-3	4	-3	1	5		
-1	1	-4	8	-11	12			
-1	1	-5	13	-24				
-1	1	-6	19					
-1	1	-7						

Odavde čitamo:

$$f(x) = (x+1)^7 - 7(x+1)^6 + 19(x+1)^5 - 24(x+1)^4 + 12(x+1)^3 + 5(x+1)^2 - 9(x+1) + 5$$

(b) *Prvo rješenje.* Označimo s $q = \sqrt[9]{3} - 1$. Vidimo da je tada $q + 1 = \sqrt[9]{3}$ nultočka polinoma $x^9 - 3$.

Ako je racionalan broj $\frac{m}{n}$ (uz $\mathrm{M}(m,n) = 1$) nultočka polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, onda znamo da brojnik (m) dijeli slobodni, a nazivnik (n) vodeći koeficijent polinoma.

Prema tome, kandidati za racionalne nultočke polinoma $x^9 - 3$ brojevi $\pm 1, \pm 3$. Kako niti jedan od tih brojeva nije jednak $\sqrt[9]{3}$, zaključujemo da $\sqrt[9]{3}$ nije racionalan broj. Odavde slijedi da ni $\sqrt[9]{3} - 1$ nije racionalan, što je trebalo dokazati.

Drugo rješenje. Pretpostavimo da je $q = \sqrt[9]{3} - 1$ racionalan. Tada je i $q + 1 = \sqrt[9]{3}$ racionalan pa ga možemo zapisati kao razlomak skraćen do kraja, dakle

$$\sqrt[9]{3} = \frac{m}{n}, \quad \text{za neke } m, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}(m,n) = 1.$$

Odavde je

$$3n^9 = m^9$$

pa zaključujemo: budući da 3 dijeli lijevu stranu gornje jednakosti, mora dijeliti i desnu. To znači $3|m^9$, a zbog toga i $3|m$ (jer je 3 prost).
To možemo zapisati kao $m = 3k$ pa jednakost postaje

$$3n^9 = 3^9k^9, \quad \text{to jest} \quad n^9 = 3^8k^9.$$

Sada na isti način kao što smo zaključili $3|m$ vidimo da vrijedi i $3|n$.

Time smo dobili $3|n$ i $3|m$, no to je kontradikcija s $\mathrm{M}(m,n) = 1$. Zaključujemo da je pretpostavka bila kriva, to jest da $\sqrt[9]{3} - 1$ nije racionalan, što je trebalo pokazati.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 3. (5 bodova) Neka je s suma koeficijenata polinoma $p(x) = (x^3 - 5x^2 + x + 7)^{2017}$. Odredite ostatke pri dijeljenju broja s sa 65 i 48.

Rješenje. Poznato je da je suma koeficijenata polinoma p jednaka $p(1)$, pa je stoga

$$s = p(1) = (1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 + 7)^{2017} = 4^{2017}.$$

Budući da je $4^3 = 64 \equiv -1 \pmod{65}$, dobivamo da je

$$4^{2017} = (4^3)^{672} \cdot 4 \equiv (-1)^{672} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{65},$$

pa je ostatak pri dijeljenju broja s sa 65 jednak 4.

S druge strane, uočimo da je $4^3 \equiv 4^2 \pmod{48}$, pa množenjem obje strane s proizvoljnom potencijom 4^n $(n \geq 0)$ dobivamo da je

$$4^{n+3} \equiv 4^{n+2} \pmod{48}, \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

Sada možemo zaključiti da je

$$4^{2017} \equiv 4^{2016} \equiv 4^{2015} \equiv \cdots \equiv 4^2 \pmod{48},$$

pa je ostatak pri dijeljenju broja s s 48 jednak 16.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 4. (5 bodova) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva za koji je $a_1 = a_2 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$ za sve $n \geq 2$. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $a_n \leq 3^n - 5$.

Rješenje. Uočimo da je $a_1 = 1 > 3^1 - 5 = -2$. Matematičkom indukcijom ćemo dokazati da jedino za $n = 1$ nejednakost iz teksta zadatka ne vrijedi. Uočimo da je nejednakost trivijalno istinita za $n = 2$ i $n = 3$ (baza indukcije). Doista,

$$a_2 = 1 \leq 3^2 - 5 = 4 \quad \text{i} \quad a_3 = 1 + 6 \cdot 1 = 7 \leq 3^3 - 5 = 22.$$

Prepostavimo da je tvrdnja istinita za brojeve $2, \ldots, n$. Za a_{n+1} tada imamo ogradu

$$a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1} \leq (3^n - 5) + 6 \cdot (3^{n-1} - 5) = (3^n + 6 \cdot 3^{n-1}) - 35 < 3^{n+1} - 5,$$

pa tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Zaključak je da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \geq 2$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 5. (5 bodova) Zadan je broj $m \in \mathbb{N}$. Ako je $x \in \mathbb{N}$ takav da je $m^2 - x^2$ prost, odredite x (tj. izrazite ga preko m).

Rješenje. Uočimo da se izraz $m^2 - x^2$ faktorizira kao $(m-x)(m+x)$. Prema tome, $m^2 - x^2$ ne može biti prost osim ako je jedan od ovih faktora jednak 1. Kako su m i x prirodni, vidimo da je $m + x > 1$ pa je ovo jedino moguće ako je $m - x = 1$, to jest $x = m - 1$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 6. (5 bodova) Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ pri dijeljenju s x^2 daje ostatak $3x + 4$, a pri dijeljenju s $x + 1$ daje ostatak -1. Odredite ostatak koji f daje pri dijeljenju s $x^3 + x^2$.

Rješenje. Prvi uvjet možemo pisati kao $f(x) = x^2 g(x) + 3x + 4$ za neki $g \in \mathbb{R}[x]$, a drugi kao $f(-1) = -1$. Trebamo odrediti ostatak pri dijeljenju s $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$.
Sada koristimo teorem o dijeljenju s ostatkom: postoje $h \in \mathbb{R}[x]$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$f(x) = (x + 1)x^2 h(x) + ax^2 + bx + c.$$

Uočimo da je $(x + 1)x^2 h(x) + ax^2$ djeljivo s x^2 pa iz prvog uvjeta čitamo $b = 3, c = 4$. Preostaje uvrstiti $x = -1$; time dobivamo $-1 = f(-1) = a - b + c = a + 1$, dakle $a = -2$.

Prema tome, ostatak od f pri dijeljenju s $x^3 + x^2$ je $-2x^2 + 3x + 4$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 1. veljače 2017.

Zadatak 7. (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x^2-2}{x^3-x-6}.$$

Rješenje. Najprije trebamo faktorizirati nazivnik; da bismo to napravili, pokušamo naći neku nultočku polinoma $g(x) = x^3 - x - 6$. Vidimo da su jedine moguće racionalne nultočke cjeli brojevi koji dijele -6, to jest $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Isprobavanjem vidimo da je $g(2) = 0$, to jest da $(x-2)$ dijeli $g(x)$. Dijeljenjem polinoma dolazimo do faktorizacije $g(x) = (x-2)(x^2+2x+3)$. Ovdje je diskriminanta kvadratnog faktora negativna, pa je time g faktoriziran do kraja.

Sada znamo da vrijedi

$$\frac{x^2-2}{x^3-x-6} = \frac{x^2-2}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$$

za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$. Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$\frac{x^2-2}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{(A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + (3A-2C)}{(x-2)(x^2+2x+3)}$$

pa uspoređivanjem koeficijenata dolazimo do sustava

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - 2B + C &= 0 \\ 3A - 2C &= -2. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $A = \frac{2}{11}, B = \frac{9}{11}, C = \frac{14}{11}$.
Time smo dobili rastav

$$\frac{x^2-2}{x^3-x-6} = \frac{\frac{2}{11}}{x-2} + \frac{\frac{9}{11}x + \frac{14}{11}}{(x^2+2x+3)}.$$