UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 1.

(a) (1 bod) Napišite tablicu istinitosti za operaciju konjunkcije.

(b) (2 boda) Dokažite da je

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

tautologija.

(c) (2 boda) Definirajte parcijalno uređen skup.

Rješenje.

(a)

A	B	A $\wedge$ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(b) Dokaz radimo pomoću tablice istinitosti:

A	B	A $\vee$ B	A $\Rightarrow$ (A $\vee$ B)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Vidimo da je sud $A \Rightarrow (A \vee B)$ istinit neovisno o A i B, dakle radi se o tautologiji.

(c) Parcijalno uređen skup je uređeni par (X, ρ) pri čemu je X skup, a $\rho \subseteq X \times X$ binarna relacija na X koja je

- refleksivna: $(\forall x \in X): \ x \ \rho \ x$;
- antisimetrična: $(\forall x, y \in X): \ ((x \ \rho \ y) \wedge (y \ \rho \ x)) \Rightarrow x = y$;
- tranzitivna: $(\forall x, y, z \in X): \ ((x \ \rho \ y) \wedge (y \ \rho \ z)) \Rightarrow x \ \rho \ z$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Riješite jednadžbu $\arcsin x = 2\pi$. Odgovor obrazložite.

(b) (3 boda) Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.

Rješenje.

(a) Funkcija arcsin definira se kao inverzna funkcija od restrikcije funkcije sinus na segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}.$$

Prema tome, slika funkcije arcsin je $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pa zaključujemo da gornja jednadžba nema rješenja.

(b) Za proizvoljne realne brojeve $x, y \in \mathbb{R}$ imamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y)
\end{aligned}$$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva podskupa skupa cijelih brojeva vrijedi: ako su oba skupa neprazna, onda su oni međusobno disjunktni skupovi.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{Z})((A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \Longrightarrow A \cap B = \emptyset).$$

Ova tvrdnja nije istinita. Naime, za $A = B = \{0\}$ vrijedi $A \cap B = \{0\} \neq \emptyset$ pa, iako su neprazni, nisu međusobno disjunktni skupovi.

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{Z})(A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset))$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa cijelih brojeva vrijedi: ako su oni međusobno disjunktni, tada su oba skupa neprazna.

Ova tvrdnja također nije istinita. Naime, za $A = \emptyset$ i $B = \{0\}$ vrijedi $A \cap B = \emptyset$, no $A = \emptyset$, pa taj skup nije neprazan.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{Z})(A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset))$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa cijelih brojeva vrijedi: ako oni nisu međusobno disjunktni, tada je barem jedan od njih prazan skup.

Budući da je originalna tvrdnja bila neistinita, onda takav mora biti i obrat po kontrapoziciji.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists A, B \subseteq \mathbb{Z})((A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \wedge A \cap B \neq \emptyset)$$

ili riječima:

Postoje dva podskupa skupa cijelih brojeva takva da su oba neprazna te da oni nisu međusobno disjunktni.

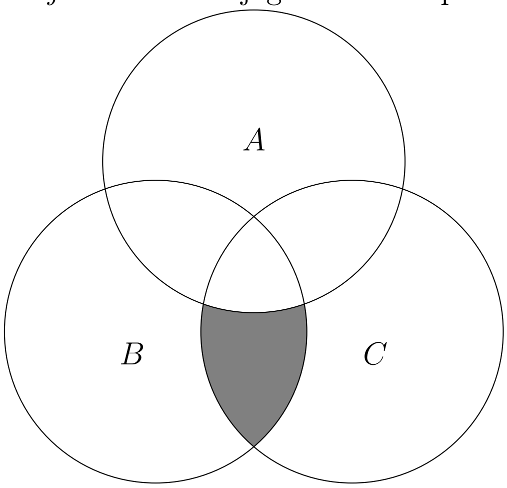
Originalna tvrdnja je bila neistinita pa je onda njena negacija istinita.

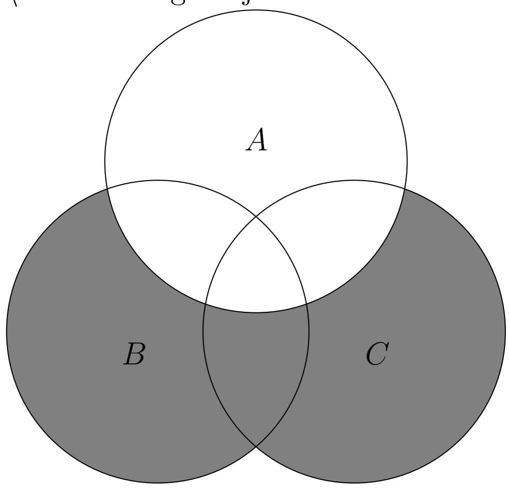
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(A \cup C) \cap (B \backslash A)$ i $(C \cup B) \backslash A$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $(A \cup C) \cap (B \backslash A)$ i $(C \cup B) \backslash A$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $(A \cup C) \cap (B \backslash A) \subseteq (C \cup B) \backslash A$ te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito.

Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x \in (A \cup C) \cap (B \backslash A)$. Tada je $x \in A \cup C$ te je $x \in B \backslash A$. Iz $x \in A \cup C$ zaključujemo da je $x \in A$ ili $x \in C$, a iz $x \in B \backslash A$ zaključujemo da $x \in B$, ali $x \notin A$. Imamo dva slučaja:

1° Slučaj $x \in A$ zapravo nije moguć jer smo dobili da mora vrijediti $x \notin A$.

2° Ako je $x \in C$, tada, zbog $C \subseteq C \cup B$, vrijedi $x \in C \cup B$, a onda, uz $x \notin A$, $x \in (C \cup B) \backslash A$.

Konačno, dobili smo da mora vrijediti $x \in (C \cup B) \backslash A$ i to za svaki $x \in (A \cup C) \cap (B \backslash A)$. Prema tome, uistinu vrijedi inkluzija $(A \cup C) \cap (B \backslash A) \subseteq (C \cup B) \backslash A$.

Obratna inkluzija ne vrijedi! Uzmimo, primjerice, $A = \emptyset, B = \{1\}$ i $C = \{2\}$. Tada vrijedi:

- $(A \cup C) \cap (B \backslash A) = (\emptyset \cup \{2\}) \cap (\{1\} \backslash \emptyset) = \{2\} \cap \{1\} = \emptyset$,
- $(C \cup B) \backslash A = (\{2\} \cup \{1\}) \backslash \emptyset = \{1, 2\} \backslash \emptyset = \{1, 2\}$.

Budući da $\{1, 2\} \nsubseteq \emptyset$, na ovom posebnom primjeru zaključujemo da općenito ne vrijedi $(C \cup B) \backslash A \subseteq (B \cup C) \backslash (A \cup C) \cap (B \backslash A)$.

Postoji primjeri za koji vrijede i jedna i druga inkluzija! Primjerice, za $A = \emptyset$ i $B = C = \{1\}$ vrijedi:

- $(A \cup C) \cap (B \backslash A) = (\emptyset \cup \{1\}) \cap (\{1\} \backslash \emptyset) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$,
- $(C \cup B) \backslash A = (\{1\} \cup \{1\}) \backslash \emptyset = \{1\} \backslash \emptyset = \{1\}$.

Prema tome, u ovom posebnom slučaju to su dva ista skupa.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$x \; \rho \; y \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \mid x^4 - y^4.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

Rješenje.

- Refleksivnost: za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $x^4 - x^4 = 0$, što je djeljivo s 4. Prema tome, $x\rho x$. Budući da to vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Z}$, relacija ρ je refleksivna.
- Simetričnost: neka su $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x\rho y$; tada vrijedi $4 \mid x^4 - y^4$. Uočimo da je tada i broj $y^4 - x^4 = -(x^4 - y^4)$ djeljiv s 4, iz čega slijedi $y\rho x$. Prema tome, relacija ρ je simetrična.
- Neka su $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takvi da vrijedi $x\rho y$ i $y\rho z$. Tada vrijedi $4 \mid x^4 - y^4$ i $4 \mid y^4 - z^4$. Uočimo da je tada i broj $x^4 - z^4 = (x^4 - y^4) + (y^4 - z^4)$ djeljiv s 4 kao zbroj dva broja djeljiv s 4. Prema tome, ρ je tranzitivna relacija.
- Relacija ρ nije antisimetrična! Primjerice, brojevi $4^4 - 0^4 = 4^4$ i $0^4 - 4^4 = -4^4$ su djeljivi brojem 4, iz čega slijedi $0\rho 4$ i $4\rho 0$. Međutim, $0 \neq 4$.

Relacija ρ je relacija ekvivalencije budući da je ona refleksivna, simeterična i tranzitivna. No, to nije relacija parcijalnog uređaja jer nije antisimetrična relacija.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 6. Funkcija $f\colon \langle 2, +\infty\rangle \to \langle -2, +\infty\rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = \ln(x^4 - 4x^2 + 5) - 1.$$

(a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f.

(b) (2 boda) Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \langle -2, +\infty\rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = \ln(x^2+1)-1$. Pronađite primjer funkcije $h\colon \langle 2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f = g \circ h$. Je li takva funkcija jedinstvena?

Rješenje.

(a) Uočimo da vrijedi $f(x) = \ln(x^4-4x^2+5)-1 = \ln((x^2-2)^2+1)-1$. Najprije ispitujemo injektivnost.

Pretpostavimo da vrijedi $f(x) = f(y)$ za neke x, y iz domene. Tada imamo

$$\begin{aligned} \ln((x^2-2)^2+1)-1 &= \ln((y^2-2)^2+1)-1 \\ \Rightarrow \quad \ln((x^2-2)^2+1) &= \ln((y^2-2)^2+1) \\ \overset{\text{ln je injekcija}}{\Rightarrow} \quad (x^2-2)^2+1 &= (y^2-2)^2+1 \\ \Rightarrow \quad (x^2-2)^2 &= (y^2-2)^2 \end{aligned}$$

Kako su izrazi x^2-2 i y^2-2 pozitivni, odavde slijedi i $x^2-2 = y^2-2$, odnosno $x^2 = y^2$. Opet, x i y su pozitivni pa odavde slijedi $x = y$. Time je injektivnost dokazana.

Pokažimo da f nije surjektivna. Kako je izraz $(x^2-2)^2+1$ koji se nalazi unutar funkcije ln očito veći ili jednak 1, zaključujemo da $\ln((x^2-2)^2+1)$ ne poprima negativne vrijednosti. Prema tome, ne postoji x takav da je, npr.

$$\ln((x^2-2)^2+1) = -0.5, \text{ odnosno } f(x) = -1.5.$$

Kako je -1.5 vrijednost iz kodomene koja se ne postiže, zaključujemo da f nije surjektivna.

(b) Iz zapisa $f(x) = \ln((x^2-2)^2+1)-1$ vidimo da možemo uzeti

$$h(x) = x^2 - 2.$$

Ovo nije jedini mogući izbor, jer očito možemo uzeti i $h(x) = 2 - x^2$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 10$.

(a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f.

(b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}(\langle 10, 17\rangle)$.

Rješenje. Zapišimo funkciju f kao kompoziciju:

$$f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 10 = (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 10 = (3^x - 3)^2 + 1 = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x),$$

gdje imamo, redom,

$$f_1(x) = 3^x, \quad f_2(x) = x - 3, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = x + 1.$$

Ovo koristimo za računanje slike i praslike.

(a) Domena funkcije f je $\mathbb{R}$ pa tražimo $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R})$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbb{R}) &= \langle 0, +\infty\rangle \\ f_2(\langle 0, +\infty\rangle) &= \langle -3, +\infty\rangle \\ f_3(\langle -3, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle \\ f_4([0, +\infty\rangle) &= [1, +\infty\rangle. \end{aligned}$$

Odavde čitamo $\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty\rangle$.

(b) Opet koristimo rastav $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}(A) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(f_4^{-1}(A))))$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_4^{-1}(\langle 10, 17\rangle) &= \langle 9, 16\rangle, \\ f_3^{-1}(\langle 9, 16\rangle) &= \langle -4, -3\rangle \cup \langle 3, 4\rangle, \\ f_2^{-1}(\langle -4, -3\rangle \cup \langle 3, 4\rangle) &= \langle -1, 0\rangle \cup \langle 6, 7\rangle, \\ f_1^{-1}(\langle -1, 0\rangle \cup \langle 6, 7\rangle) &= f_1^{-1}(\langle -1, 0\rangle) \cup f_1^{-1}(\langle 6, 7\rangle) = \emptyset \cup \langle \log_2(6), \log_2(7)\rangle = \langle \log_2(6), \log_2(7)\rangle. \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $f^{-1}(\langle 10, 17\rangle) = \langle \log_2(6), \log_2(7)\rangle$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 1.

(a) (1 bod) Napišite tablicu istinitosti za operaciju disjunkcije.

(b) (2 boda) Dokažite da je

$$(A \wedge B) \Rightarrow B$$

tautologija.

(c) (2 boda) Definirajte relaciju ekvivalencije.

Rješenje.

(a)

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(b) Dokaz radimo pomoću tablice istinitosti:

A	B	A ∧ B	(A ∧ B) ⇒ A
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Vidimo da je sud $(A \wedge B) \Rightarrow B$ istinit neovisno o A i B, dakle radi se o tautologiji.

(c) Kažemo da je binarna relacija $\rho \subseteq X \times X$ relacija ekvivalencije ako je

- refleksivna: $(\forall x \in X): \ x \ \rho \ x$;
- simetrična: $(\forall x, y \in X): \ x \ \rho \ y \Rightarrow y \ \rho \ x$;
- tranzitivna: $(\forall x, y, z \in X): \ ((x \ \rho \ y) \wedge (y \ \rho \ z)) \Rightarrow x \ \rho \ z$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Riješite jednadžbu $\arccos x = 2\pi$. Odgovor obrazložite.

(b) (3 boda) Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.

Rješenje.

(a) Funkcija arccos definira se kao inverzna funkcija od restrikcije funkcije kosinus na segment $[0, \pi]$:

$$\arccos = (\cos_{|[0,\pi]})^{-1}.$$

Prema tome, slika funkcije arccos je $[0, \pi]$ pa zaključujemo da gornja jednadžba nema rješenja.

(b) Za proizvoljne realne brojeve $x, y \in \mathbb{R}$ imamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \mathrm{ch}(x+y)
\end{aligned}$$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako ti skupovi nisu međusobno disjunktni, onda je barem jedan od tih skupova prazan skup.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})(A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)).$$

Ova tvrdnja nije istinita. Naime, za $A = B = \{1\}$ vrijedi $A \cap B = \{1\} \neq \emptyset$, no nijedan od tih skupova nije prazan skup.

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})((A = \emptyset \vee B = \emptyset) \Longrightarrow A \cap B \neq \emptyset)$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako je barem jedan od tih skupova prazan skup, onda ti skupovi nisu međusobno disjunktni.

Ova tvrdnja također nije istinita. Naime, bilo da je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$, mora vrijediti $A \cap B = \emptyset$; u suprotnom, kada bi postojao $x \in A \cap B$, vrijedilo bi $x \in A$ i $x \in B$, što znači da niti jedan od njih nije prazan skup, što je suprotno pretpostavci.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})((A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \Longrightarrow A \cap B = \emptyset)$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako su oba skupa neprazna, tada je njihov presjek prazan skup.

Budući da je originalna tvrdnja bila neistinita, onda takav mora biti i obrat po kontrapoziciji.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists A, B \subseteq \mathbb{N})(A \cap B = \emptyset \wedge (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset))$$

ili riječima:

Postoje dva podskupa skupa prirodnih brojeva takva da su međusobno disjunktni te da su oba skupa neprazna.

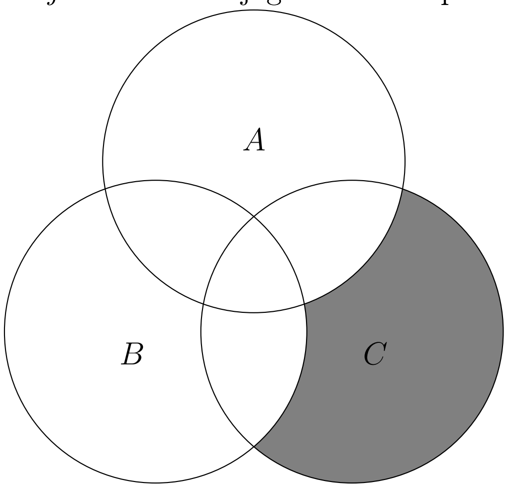
Originalna tvrdnja je bila neistinita pa je onda njena negacija istinita.

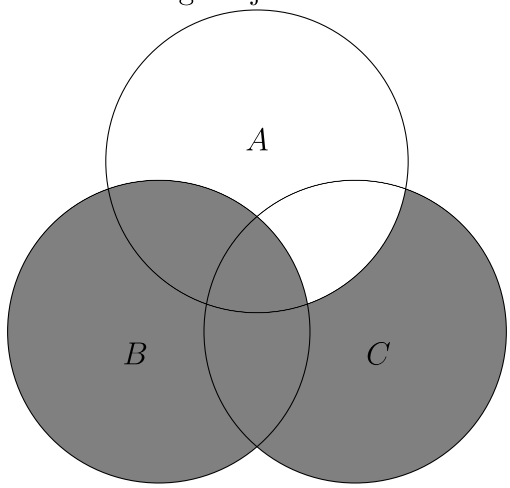
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(B \cup C) \setminus (A \cup B)$ i $(C \setminus A) \cup B$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $(B \cup C) \setminus (A \cup B)$ i $(C \setminus A) \cup B$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $(B \cup C) \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cup B$ te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito.

Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x \in (B \cup C) \setminus (A \cup B)$. Tada je $x \in B \cup C$, ali $x \notin A \cup B$. Iz $x \in B \cup C$ zaključujemo da je $x \in B$ ili $x \in C$, a iz $x \notin A \cup B$ zaključujemo da $x \notin A$ i $x \notin B$. Imamo dva slučaja:

1° Slučaj $x \in B$ zapravo nije moguć jer smo dobili da mora vrijediti $x \notin B$.

2° Ako je $x \in C$, tada, uz $x \notin A$, zaključujemo da je $x \in C \setminus A$, a onda, zbog $C \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cup B$, slijedi $x \in (C \setminus A) \cup B$.

Konačno, dobili smo da mora vrijediti $x \in (C \setminus A) \cup B$ i to za svaki $x \in (B \cup C) \setminus (A \cup B)$. Prema tome, uistinu vrijedi inkluzija $(B \cup C) \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cup B$.

Obratna inkluzija ne vrijedi! Uzmimo, primjerice, $A = \emptyset, B = \{1\}$ i $C = \{2\}$. Tada vrijedi:

- $(B \cup C) \setminus (A \cup B) = (\{1\} \cup \{2\}) \setminus (\emptyset \cup \{1\}) = \{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\}$,
- $(C \setminus A) \cup B = (\{2\} \setminus \emptyset) \cup \{1\} = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$.

Budući da $\{1, 2\} \nsubseteq \{2\}$, na ovom posebnom primjeru zaključujemo da općenito ne vrijedi $(C \setminus A) \cup B \subseteq (B \cup C) \setminus (A \cup B)$.

Postoji primjeri za koji vrijede i jedna i druga inkluzija! Primjerice, za $A = B = \emptyset$ i $C = \{1\}$ vrijedi:

- $(B \cup C) \setminus (A \cup B) = (\emptyset \cup \{1\}) \setminus (\emptyset \cup \emptyset) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$,
- $(C \setminus A) \cup B = (\{1\} \setminus \emptyset) \cup \emptyset = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$.

Prema tome, u ovom posebnom slučaju to su dva ista skupa.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$x \;\rho\; y \quad \iff \quad 5 \mid x^5 - y^5.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

Rješenje.

- Refleksivnost: za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $x^5 - x^5 = 0$, što je djeljivo s 5. Prema tome, $x\rho x$. Budući da to vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Z}$, relacija ρ je refleksivna.

- Simetričnost: neka su $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x\rho y$; tada vrijedi $5 \mid x^5 - y^5$. Uočimo da je tada i broj $y^5 - x^5 = -\left(x^5 - y^5\right)$ djeljiv s 5, iz čega slijedi $y\rho x$. Prema tome, relacija ρ je simetrična.

- Neka su $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takvi da vrijedi $x\rho y$ i $y\rho z$. Tada vrijedi $5 \mid x^5 - y^5$ i $5 \mid y^5 - z^5$. Uočimo da je tada i broj $x^5 - z^5 = (x^5 - y^5) + (y^5 - z^5)$ djeljiv s 5 kao zbroj dva broja djeljiv s 5. Prema tome, ρ je tranzitivna relacija.

- Relacija ρ nije antisimetrična! Primjerice, brojevi $5^5 - 0^5 = 5^5$ i $0^5 - 5^5 = -5^5$ su djeljivi brojem 5, iz čega slijedi $0\rho 5$ i $5\rho 0$. Međutim, $0 \neq 5$.

Relacija ρ je relacija ekvivalencije budući da je ona refleksivna, simeterična i tranzitivna. No, to nije relacija parcijalnog uređaja jer nije antisimetrična relacija.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 6. Funkcija $f\colon \langle 2, +\infty\rangle \to \langle 1, +\infty\rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = \ln(x^4 - 6x^2 + 10) + 2.$$

(a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f.

(b) (2 boda) Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \langle 1, +\infty\rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = \ln(x^2+1)+2$. Pronađite primjer funkcije $h\colon \langle 2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f = g \circ h$. Je li takva funkcija jedinstvena?

Rješenje.

(a) Uočimo da vrijedi $f(x) = \ln(x^4-6x^2+10)+2 = \ln((x^2-3)^2+1)-2$. Najprije ispitujemo injektivnost.

Pretpostavimo da vrijedi $f(x) = f(y)$ za neke x, y iz domene. Tada imamo

$$\begin{aligned} &\ln((x^2-3)^2+1)+2 = \ln((y^2-3)^2+1)+2 \\ \Rightarrow\quad &\ln((x^2-3)^2+1) = \ln((y^2-3)^2+1) \\ \overset{\ln\text{ je injekcija}}{\Rightarrow}\quad &(x^2-3)^2+1 = (y^2-3)^2+1 \\ \Rightarrow\quad &(x^2-3)^2 = (y^2-3)^2 \end{aligned}$$

Kako su izrazi x^2-3 i y^2-3 pozitivni, odavde slijedi i $x^2-3 = y^2-3$, odnosno $x^2 = y^2$. Opet, x i y su pozitivni pa odavde slijedi $x = y$. Time je injektivnost dokazana.

Pokažimo da f nije surjektivna. Kako je izraz $(x^2-3)^2+1$ koji se nalazi unutar funkcije ln očito veći ili jednak 1, zaključujemo da $\ln((x^2-3)^2+1)$ ne poprima negativne vrijednosti. Prema tome, ne postoji x takav da je, npr.

$$\ln((x^2-3)^2+1) = -0.5, \text{ odnosno } f(x) = 1.5.$$

Kako je 1.5 vrijednost iz kodomene koja se ne postiže, zaključujemo da f nije surjektivna.

(b) Iz zapisa $f(x) = \ln((x^2-3)^2+1)+2$ vidimo da možemo uzeti

$$h(x) = x^2 - 3.$$

Ovo nije jedini mogući izbor, jer očito možemo uzeti i $h(x) = 3 - x^2$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 5$.

(a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f.

(b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}(\langle 5, 10\rangle)$.

Rješenje. Zapišimo funkciju f kao kompoziciju:

$$f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 5 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 5 = (2^x - 2)^2 + 1 = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x),$$

gdje imamo, redom,

$$f_1(x) = 2^x, \quad f_2(x) = x - 2, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = x + 1.$$

Ovo koristimo za računanje slike i praslike.

(a) Domena funkcije f je $\mathbb{R}$ pa tražimo $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R})$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbb{R}) &= \langle 0, +\infty\rangle \\ f_2(\langle 0, +\infty\rangle) &= \langle -2, +\infty\rangle \\ f_3(\langle -2, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle \\ f_4([0, +\infty\rangle) &= [1, +\infty\rangle. \end{aligned}$$

Odavde čitamo $\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty\rangle$.

(b) Opet koristimo rastav $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}(A) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(f_4^{-1}(A))))$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_4^{-1}(\langle 5, 10\rangle) &= \langle 4, 9\rangle, \\ f_3^{-1}(\langle 4, 9\rangle) &= \langle -3, -2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle, \\ f_2^{-1}(\langle -3, -2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle) &= \langle -2, 0\rangle \cup \langle 4, 5\rangle, \\ f_1^{-1}(\langle -2, 0\rangle \cup \langle 4, 5\rangle) &= f_1^{-1}(\langle -2, 0\rangle) \cup f_1^{-1}(\langle 4, 5\rangle) = \emptyset \cup \langle 2, \log_2(5)\rangle = \langle 2, \log_2(5)\rangle. \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $f^{-1}(\langle 5, 10\rangle) = \langle 2, \log_2(5)\rangle$.