UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Godišnji komplet časopisa Studentski život sastoji se od nekoliko brojeva. Svaki broj ne mora imati isti broj listova, ali se zna da svaki ima 40 ili 44 lista. Može li godišnji komplet imati ukupno 340 listova? Ako može, koliko brojeva tada čini godišnji komplet? Odgovore obrazložite.

(b) (3 boda) U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu $z^5 = i$ i rješenja prikažite u Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini.

Rješenje.

(a) Ako je x brojeva imalo 40 listova, a y brojeva 44 lista, tada je $40x+44y = 340$ odnosno $10x+11y = 85$. Odatle slijedi $10(x + y) + y = 85$, pa je (gleda se zadnja znamenka!) $y = 5$ i $x + y = 8$. Dakle, godišnji komplet može imati 340 listova i tada ga čini 8 brojeva (3 po 40 i 5 po 44 lista).
Napomena: Zadatak se može riješiti i na druge načine.

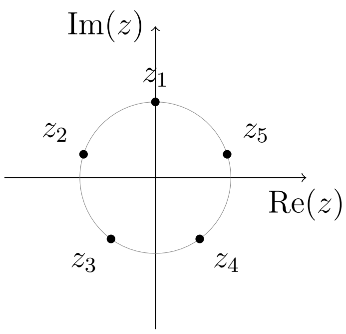
(b) Kako je (promotrite $i = (0, 1)$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu)

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

to de Moivreova formula za korjenovanje daje

$$z_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right), k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Skicu u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini dobivamo kao vrhove pravilnog peterokuta na jediničnoj kružnici oko ishodišta, s tim da je jedan vrh u točki i.



UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Navedite primjer dva polinoma f i g petog stupnja sa svojstvom da je njihov zbroj polinom četvrtog stupnja. Koliki je kvocijent pri dijeljenju f sa g?

(b) (3 boda) Zadan je polinom $p(x) = x^3 + px^2 + qx + r$. Odredite zbroj kvadrata njegovih nultočaka.

Rješenje.

(a) Takva su bilo koja dva polinoma petog stupnja kod kojih su vodeći koeficijenti (a_5) suprotni brojevi. Kvocijent je tada -1.

(b) Neka su x_1, x_2 i x_3 nultočke od p. Trebali bismo zbroj kvadrata raspisati u obliku izraza za koji bismo mogli iskoristiti Vieteove formule:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q,\ x_1x_2x_3 = -r.$$

Kvadrirajmo prvu od ovih formula. Dobivamo

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 &= p^2, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= p^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= p^2 - 2q. \end{aligned}$$

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 3. (5 bodova) Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$n^2 + 3n + 4 \leqslant 2^{n+2}.$$

Rješenje. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.
Baza. Za $n = 1$ imamo $n^2 + 3n + 4 = 8 = 2^{n+2}$, dakle tvrdnja vrijedi.
Pretpostavka. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n^2 + 3n + 4 \leqslant 2^{n+2}$.
Korak. Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, to jest da vrijedi

$$(n+1)^2 + 3(n+1) + 4 \leqslant 2^{n+3}.$$

Imamo

$$2^{n+3} = 2 \cdot 2^{n+2} \geqslant \text{(po pretp.)} \geqslant 2(n^2 + 3n + 4).$$

Prema tome, dovoljno je dokazati da vrijedi $2(n^2 + 3n + 4) \geqslant (n+1)^2 + 3(n+1) + 4$:

$$\begin{aligned} & 2(n^2 + 3n + 4) \geqslant (n+1)^2 + 3(n+1) + 4 \\ \iff & 2n^2 + 6n + 8 \geqslant n^2 + 5n + 8 \\ \iff & n^2 + 3n \geqslant 0, \end{aligned}$$

a posljednja nejednakost očito vrijedi jer je $n > 0$.
Ovime smo dokazali da vrijedi $2^{n+3} \geqslant (n+1)^2 + 3(n+1) + 4$ pa je induktivni korak završen. Prema principu matematičke indukcije sada zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena. U koraku možemo krenuti i od druge strane, raspisujući na sljedeći način:

$$(n+1)^2 + 3(n+1) + 4 = n^2 + 5n + 8 = (n^2 + 3n + 4) + (2n + 4) \leqslant \text{(po pretp.)} \leqslant 2^{n+2} + 2n + 4$$

Sada preostaje pokazati da vrijedi $2n + 4 \leqslant 2^{n+2}$, no ova tvrdnja **nije očita**!

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 4. (5 bodova)

(a) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 2018^{1018} s 36.

(b) Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 + 5$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje.

(a) Možemo faktorizirati $36 = 4 \cdot 9$ i promatrati ostatke pri dijeljenju sa 4, odnosno 9. Modulo 4 je situacija jednostavna: uočimo da je 2018 paran pa je broj 2018^{1018} sigurno djeljiv s 4. Računamo ostatak pri dijeljenju s 9:

$$2018 \equiv 2 \pmod 9, \quad 2^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9.$$

Odavde je

$$2018^{1018} \equiv 2 \cdot (2^3)^{333} \equiv 2 \cdot (-1)^{1009} = -2 \equiv 7 \pmod 9.$$

Zaključujemo da je ostatak pri dijeljenju broja 2018^{1018} sa 36 djeljiv s 4 i oblika $9k+7$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Jedini broj iz skupa $\{0, 1, \ldots, 35\}$ koji zadovoljava ova dva uvjeta je 16, stoga je to i traženi ostatak pri dijeljenju sa 36.

(b) Neka je $n^2 + 5$ kvadrat prirodnog broja m. Tada imamo

$$n^2 + 5 = m^2 \iff 5 = m^2 - n^2 \iff 5 = (m-n)(m+n).$$

Uočimo da smo ovdje faktorizirali broj 5 koji je prost, stoga jedan od dva faktora mora biti jednak 1, a drugi 5. Očito je $m - n$ manji od $m + n$, stoga zaključujemo $m - n = 1$ i $m + n = 5$. Oduzimanjem ove dvije jednadžbe dobivamo $n = 2$, a provjera pokazuje da je za $n = 2$ broj $n^2 + 5 = 9$ doista kvadrat prirodnog broja. Zaključujemo da je $n = 2$ jedini takav broj.

Napomena. Nije dovoljno ispisati vrijednosti $n^2 + 5$ za prvih nekoliko prirodnih brojeva i na temelju toga zaključiti da je $n = 2$ jedino rješenje.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 5. (5 bodova) Postoji li ne-nul polinom p za koji vrijedi

$$(x^2 - 4)p(x+3) = p(x)^2 \ ?$$

Rješenje. Uočimo da traženi polinom p, ako postoji, mora biti stupnja 2.
Uvrštavanjem $x = 2$ i $x = -2$ dobivamo da vrijedi $0 = p(2)^2$ i $0 = p(-2)^2$, to jest $p(2) = p(-2) = 0$.
Sada uvrstimo npr. $x = -1$ pa dobijemo $-3 \cdot p(2) = p(-1)^2$. Kako već znamo da vrijedi $p(2) = 0$, odavde slijedi i $p(-1) = 0$.

Time smo pokazali da polinom p ima tri različite nultočke, stoga ne može biti riječ o polinomu drugog stupnja. Zaključujemo da je jedini p koji zadovoljava početnu jednadžbu upravo nul-polinom.

Napomena. Druga mogućnost je, nakon što se utvrdi da je p drugog stupnja, uvrstiti $p(x) = ax^2 + bx + c$ u početnu jednadžbu. Uspoređivanjem koeficijenata dobivamo sustav od 5 jednadžbi s 3 nepoznanice koji nema rješenja.

Napomena. Česta greška: $p(x)^2$ nije isto što i $p(x^2)$.
Također, stupanj polinoma $p(x)^2$ nije $(\deg p)^2$, već $2 \cdot \deg p$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 6.(5 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma

$$f(x) = x^{300} + 2x^{200} + 5x^{23} + 2$$

polinomom $g(x) = x^3 - x$.

Rješenje. Vrijedi $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, pri čemu je $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g = 3$, prema tome ostatak je oblika $r(x) = ax^2 + bx + c$ za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$. Primijetimo još da je $g(x) = x^3 - x = x\,(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$. Uvrstimo:

$$x^{300} + 2x^{200} + 5x^{23} + 2 = q(x)x(x+1)(x-1) + ax^2 + bx + c.$$

Uvrštavanjem $x = 0, -1, 1$ u ovu jednakost dobivamo, redom, jednadžbe

$$\begin{aligned} 2 &= c, \\ 0 &= a - b + c, \\ 10 &= a + b + c. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $a = 3, b = 5$ i $c = 2$. Prema tome, traženi ostatak je $r(x) = 3x^2 + 5x + 2$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 7. (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{5x^2+6x+4}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}.$$

Rješenje. Rastav je oblika

$$\frac{5x^2+6x+4}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

za neke konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$; pritom smo se uvjerili da izraz x^2+x+1 ima negativnu diskriminantu pa se ne može dodatno faktorizirati. Množenjem ove jednakosti s $(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
5x^2+6x+4 &= A\left(x^2+x+1\right) + (Bx+C)(x+1),\\
5x^2+6x+4 &= Ax^2+Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C,\\
5x^2+6x+4 &= (A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo sustav

$$\begin{aligned}
5 &= A+B,\\
6 &= A+B+C,\\
4 &= A+C.
\end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je $A=3, B=2$ i $C=1$. Prema tome, traženi rastav je

$$\frac{5x^2+6x+4}{(x+2)\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{3}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2+2x+2}.$$

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Godišnji komplet časopisa Studentski život sastoji se od nekoliko brojeva. Svaki broj ne mora imati isti broj listova, ali se zna da svaki ima 40 ili 44 lista. Može li godišnji komplet imati ukupno 380 listova? Ako može, koliko brojeva tada čini godišnji komplet? Odgovore obrazložite.

(b) (3 boda) U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu $z^5 = -i$ i rješenja prikažite u Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini.

Rješenje.

(a) Ako je x brojeva imalo 40 listova, a y brojeva 44 lista, tada je $40x+44y = 380$ odnosno $10x+11y = 95$. Odatle slijedi $10(x + y) + y = 95$, pa je (gleda se zadnja znamenka!) $y = 5$ i $x + y = 9$. Dakle, godišnji komplet može imati 380 listova i tada ga čini 9 brojeva (4 po 40 i 5 po 44 lista).

Napomena: Zadatak se može riješiti i na druge načine.

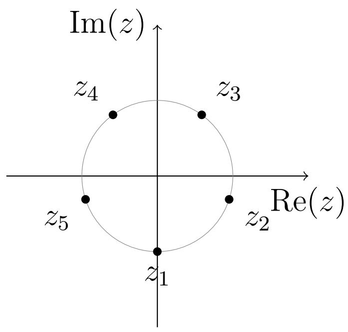
(b) Kako je (promotrite $-i = (0, -1)$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu)

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2},$$

to de Moivreova formula za korjenovanje daje

$$z_k = \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right), k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Skicu u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini dobivamo kao vrhove pravilnog peterokuta na jediničnoj kružnici oko ishodišta, s tim da je jedan vrh u točki $-i$.



UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Navedite primjer dva polinoma f i g četvrtog stupnja sa svojstvom da je njihov zbroj polinom trećeg stupnja. Koliki je kvocijent pri dijeljenju f sa g?

(b) (3 boda) Zadan je polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Odredite zbroj kvadrata nultočaka polinoma p.

Rješenje.

(a) Takva su bilo koja dva polinoma četvrtog stupnja kod kojih su vodeći koeficijenti (a_4) suprotni brojevi. Kvocijent je tada -1.

(b) Neka su x_1, x_2 i x_3 nultočke od p. Trebali bismo zbroj kvadrata raspisati u obliku izraza za koji bismo mogli iskoristiti Vieteove formule:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,\ x_1x_2x_3 = -c.$$

Kvadrirajmo prvu od ovih formula. Dobivamo

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 &= a^2, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= a^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= a^2 - 2b. \end{aligned}$$

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 3. (5 bodova) Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$n^2 + 7n + 8 \leqslant 2^{n+3}.$$

Rješenje. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.
Baza. Za $n = 1$ imamo $n^2 + 7n + 8 = 16 = 2^{n+3}$, dakle tvrdnja vrijedi.
Pretpostavka. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n^2 + 7n + 8 \leqslant 2^{n+3}$.
Korak. Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, to jest da vrijedi

$$(n + 1)^2 + 7(n + 1) + 8 \leqslant 2^{n+4}.$$

Imamo

$$2^{n+4} = 2 \cdot 2^{n+3} \geqslant \text{(po pretp.)} \geqslant 2(n^2 + 7n + 8).$$

Prema tome, dovoljno je dokazati da vrijedi $2(n^2 + 7n + 8) \geqslant (n + 1)^2 + 7(n + 1) + 8$:

$$\begin{aligned} & 2(n^2 + 7n + 8) \geqslant (n + 1)^2 + 7(n + 1) + 8 \\ \iff & 2n^2 + 14n + 16 \geqslant n^2 + 9n + 16 \\ \iff & n^2 + 5n \geqslant 0, \end{aligned}$$

a posljednja nejednakost očito vrijedi jer je $n > 0$.
Ovime smo dokazali da vrijedi $2^{n+4} \geqslant (n + 1)^2 + 7(n + 1) + 8$ pa je induktivni korak završen. Prema principu matematičke indukcije sada zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena. U koraku možemo krenuti i od druge strane, raspisujući na sljedeći način:

$$(n + 1)^2 + 7(n + 1) + 8 = n^2 + 9n + 16 = (n^2 + 7n + 8) + (2n + 8) \leqslant \text{(po pretp.)} \leqslant 2^{n+3} + 2n + 8$$

Sada preostaje pokazati da vrijedi $2n + 8 \leqslant 2^{n+3}$, no ova tvrdnja **nije očita**!

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 4. (5 bodova)

(a) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 1018^{2018} sa 100.

(b) Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 + 3$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje.

(a) Možemo faktorizirati $100 = 4 \cdot 25$ i promatrati ostatke pri dijeljenju sa 4, odnosno 25. Modulo 4 je situacija jednostavna: uočimo da je 1018 paran pa je broj 1018^{2018} sigurno djeljiv s 4. Računamo ostatak pri dijeljenju s 25:

$$1018 \equiv 18 \pmod{25}, \quad 18^2 \equiv 324 \equiv -1 \pmod{25}.$$

Odavde je

$$1018^{2018} \equiv (18^2)^{1009} \equiv (-1)^{1009} = -1 \pmod{25}.$$

Zaključujemo da je ostatak pri dijeljenju broja 1018^{2018} sa 100 djeljiv s 4 i oblika $25k - 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Jedini broj iz skupa $\{0, 1, \ldots, 99\}$ koji zadovoljava ova dva uvjeta je 24, stoga je to i traženi ostatak pri dijeljenju sa 100.

(b) Neka je $n^2 + 3$ kvadrat prirodnog broja m. Tada imamo

$$n^2 + 3 = m^2 \iff 3 = m^2 - n^2 \iff 3 = (m - n)(m + n).$$

Uočimo da smo ovdje faktorizirali broj 3 koji je prost, stoga jedan od dva faktora mora biti jednak 1, a drugi 3. Očito je $m - n$ manji od $m + n$, stoga zaključujemo $m - n = 1$ i $m + n = 3$. Oduzimanjem ove dvije jednadžbe dobivamo $n = 1$, a provjera pokazuje da je za $n = 1$ broj $n^2 + 3 = 4$ doista kvadrat prirodnog broja. Zaključujemo da je $n = 1$ jedini takav broj.

Napomena. Nije dovoljno ispisati vrijednosti $n^2 + 3$ za prvih nekoliko prirodnih brojeva i na temelju toga zaključiti da je $n = 1$ jedino rješenje.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 5. (5 bodova) Postoji li ne-nul polinom p za koji vrijedi

$$(x^2 - 1) \cdot p(x-2) = p(x)^2 \text{ ?}$$

Rješenje. Uočimo da traženi polinom p, ako postoji, mora biti stupnja 2.

Uvrštavanjem $x = 1$ i $x = -1$ dobivamo da vrijedi $0 = p(1)^2$ i $0 = p(-1)^2$, to jest $p(1) = p(-1) = 0$. Sada uvrstimo npr. $x = 3$ pa dobijemo $8 \cdot p(1) = p(3)^2$. Kako već znamo da vrijedi $p(1) = 0$, odavde slijedi i $p(3) = 0$.

Time smo pokazali da polinom p ima tri različite nultočke, stoga ne može biti riječ o polinomu drugog stupnja. Zaključujemo da je jedini p koji zadovoljava početnu jednadžbu upravo nul-polinom.

Napomena. Druga mogućnost je, nakon što se utvrdi da je p drugog stupnja, uvrstiti $p(x) = ax^2 + bx + c$ u početnu jednadžbu. Uspoređivanjem koeficijenata dobivamo sustav od 5 jednadžbi s 3 nepoznanice koji nema rješenja.

Napomena. Česta greška: $p(x)^2$ nije isto što i $p(x^2)$.
Također, stupanj polinoma $p(x)^2$ nije $(\deg p)^2$, već $2 \cdot \deg p$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 6.(5 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma

$$f(x) = x^{200} + 5x^{100} + 2x^{13} + 1$$

polinomom $g(x) = x^3 - x$.

Rješenje. Vrijedi $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, pri čemu je $\mathrm{st} r < \mathrm{st} g = 3$, prema tome ostatak je oblika $r(x) = ax^2 + bx + c$ za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$. Primijetimo još da je $g(x) = x^3 - x = x\left(x^2 - 1\right) = x(x+1)(x-1)$. Uvrstimo:

$$x^{200} + 5x^{100} + 2x^{13} + 1 = q(x)x(x+1)(x-1) + ax^2 + bx + c.$$

Uvrštavanjem $x = 0, -1, 1$ u ovu jednakost dobivamo, redom, jednadžbe

$$\begin{aligned} 1 &= c, \\ 5 &= a - b + c, \\ 9 &= a + b + c. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $a = 6, b = 2$ i $c = 1$. Prema tome, traženi ostatak je $r(x) = 6x^2 + 2x + 1$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2018.

Zadatak 7. (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{3x^2+7x+4}{(x+2)\left(x^2+2x+2\right)}.$$

Rješenje. Rastav je oblika

$$\frac{3x^2+7x+4}{(x+2)\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

za neke konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$; pritom smo se uvjerili da izraz x^2+2x+2 ima negativnu diskriminantu pa se ne može dodatno faktorizirati. Množenjem ove jednakosti s $(x+2)\left(x^2+2x+2\right)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
3x^2+7x+4 &= A\left(x^2+2x+2\right) + (Bx+C)(x+2),\\
3x^2+7x+4 &= Ax^2+2Ax+2A+Bx^2+2Bx+Cx+2C,\\
3x^2+7x+4 &= (A+B)x^2+(2A+2B+C)x+2A+2C
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo sustav

$$\begin{aligned}
3 &= A+B,\\
7 &= 2A+2B+C,\\
4 &= 2A+2C.
\end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je $A=1, B=2$ i $C=1$. Prema tome, traženi rastav je

$$\frac{3x^2+7x+4}{(x+2)\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2+2x+2}.$$