UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 1.

(a) (1 bod) Napišite semantičku tablicu (tablicu istinitosti) za sud $A \vee \overline{A}$.

(b) (2 boda) Odredite partitivni skup $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$.

(c) (2 boda) Napišite <u>sve</u> binarne relacije na skupu $S = \{0, 1\}$ koje su refleksivne.

Rješenje.

(a)

A	$\overline{\text{A}}$	A $\vee$ $\overline{\text{A}}$
0	1	1
1	0	1

(b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(c) To su:

- $\{(0,0), (1,1)\}$,
- $\{(0,0), (1,1), (0,1)\}$,
- $\{(0,0), (1,1), (1,0)\}$,
- $\{(0,0), (1,1), (0,1), (1,0)\}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 2.

(a) (1 bod) Skicirajte graf funkcije $f(x) = |x+2|$.

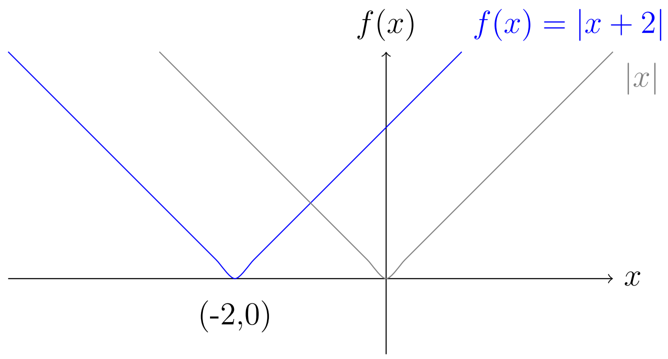
(b) (2 boda) Zbroj $\sin x + \sin y$ prikažite u obliku produkta primjenjujući formulu

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big).$$

(c) (2 boda) Izvedite formulu kojom se $\operatorname{ch} 2x$ izražava pomoću $\operatorname{ch} x$.

Rješenje.

(a) Graf tražene funkcije naznačen je plavom bojom, uz pomoćni graf apsolutne vrijednosti $|x|$ kao referentni graf (kojeg translatiramo ulijevo za 2 kako bismo dobili konačno rješenje).



(b) Zapišimo formulu s oznakama α i β umjesto s x i y:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big).$$

Pitamo se za koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x, \\ \alpha - \beta &= y. \end{aligned}$$

Naime, u danoj formuli ćemo uvrštavanjem na desnoj strani jednakosti dobiti željeni izraz $\sin x + \sin y$, a s lijeve strane traženi produkt. Rješavanjem dobivamo da je $\alpha = \frac{x+y}{2}$ i $\beta = \frac{x-y}{2}$. Uvrštavanjem u prvu jednakost koju množimo brojem 2 dobivamo

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

(c) Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(\operatorname{ch} x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.$$

Prema tome, $\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako su skupovi međusobno disjunktni, tada njihovi komplementi imaju bar jedan zajednički element.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})(A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A^c \cap B^c \neq \emptyset).$$

Ova tvrdnja nije istinita. Naime, za $A \subset \mathbb{N}$ i $B = A^c$ vrijedi $A \cap B = \emptyset$ i $A^c \cap B^c = A^c \cap A = \emptyset$.

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})(A^c \cap B^c \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap B = \emptyset)$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako njihovi komplementi imaju bar jedan zajednički element, tada su skupovi međusobno disjunktni.

Ova tvrdnja također nije istinita. Naime, za $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ i $B = A$ vrijedi $A^c \cap B^c \neq \emptyset$ i $A \cap B = A \neq \emptyset$.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})(A^c \cap B^c = \emptyset \Longrightarrow A \cap B \neq \emptyset)$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako njihovi komplementi nemaju niti jedan zajednički element, tada skupovi nisu međusobno disjunktni.

Budući da je originalna tvrdnja bila neistinita, onda takav mora biti i obrat po kontrapoziciji.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists A, B \subseteq \mathbb{N})(A \cap B = \emptyset \wedge A^c \cap B^c = \emptyset)$$

ili riječima:

Postoje dva podskupa skupa prirodnih brojeva takva da su i skupovi i njihovi komplementi međusobno disjunktni.

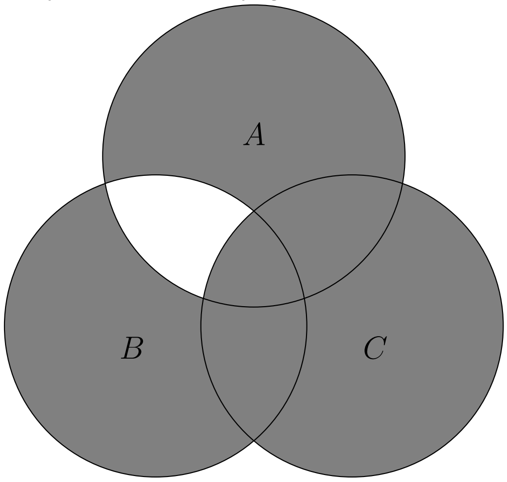
Originalna tvrdnja je bila neistinita pa je onda njena negacija istinita.

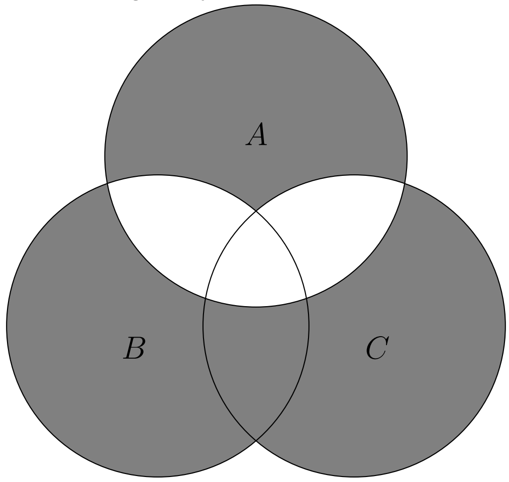
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(A \triangle B) \cup C$ i $A \triangle (C \cup B)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $(A \triangle B) \cup C$ i $A \triangle (C \cup B)$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $(A \triangle B) \cup C \supseteq A \triangle (C \cup B)$ te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito.

Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x \in A \triangle (C \cup B)$. Tada je $x \in A \setminus (B \cup C)$ ili $x \in (B \cup C) \setminus A$, odnosno $x \in A \setminus (B \cup C)$ ili $x \in B \setminus A$ ili $x \in C \setminus A$. Imamo tri slučaja:

1° Ako je $x \in A \setminus (B \cup C)$, tada zbog $B \subseteq B \cup C$ slijedi $x \in A \setminus B$, te $x \in A \triangle B$. Slijedi $x \in (A \triangle B) \cup C$.

2° Ako je $x \in B \setminus A$, tada je $x \in A \triangle B$, pa je $x \in (A \triangle B) \cup C$.

3° Ako je $x \in C \setminus A$, tada je $x \in C$, pa je $x \in (A \triangle B) \cup C$.

Prema tome, uistinu vrijedi inkluzija $(A \triangle B) \cup C \supseteq A \triangle (C \cup B)$.

Obratna inkluzija ne vrijedi! Uzmimo, primjerice, $A = \{1\}, B = \emptyset$ i $C = \{1\}$. Tada vrijedi:

- $(A \triangle B) \cup C = (\{1\} \triangle \emptyset) \cup \{1\} = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$,
- $A \triangle (C \cup B) = \{1\} \triangle (\{1\} \cup \emptyset) = \{1\} \triangle \{1\} = \emptyset$.

Budući da $\{1\} \not\subseteq \emptyset$, na ovom posebnom primjeru zaključujemo da općenito ne vrijedi $(A \triangle B) \cup C \subseteq A \triangle (C \cup B)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sa

$$x \ \rho \ y \quad \Longleftrightarrow \quad |y - x| \leq 2.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

Rješenje.

- Refleksivnost: za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $|x - x| = 0 \leq 2$, pa je prema tome, $x \ \rho \ x$. Budući da to vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$, relacija ρ je refleksivna.
- Simetričnost: neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \ \rho \ y$; tada vrijedi $|y - x| \leq 2$. Uočimo da je tada i $|x - y| \leq 2$, iz čega slijedi $y \rho x$. Prema tome, relacija ρ je simetrična.
- Relacija ρ nije tranzitivna! Primjerice, $|3 - 1| = 2$ i $|4 - 3| = 1 \leq 2$, iz čega slijedi $1 \ \rho \ 3$ i $3 \ \rho \ 4$. Međutim, $|4 - 1| \geq 2$, prema tome $1 \ \not\rho \ 4$.
- Relacija ρ nije antisimetrična! Primjerice, $1 \ \rho \ 2$ i $2 \ \rho \ 1$, ali $1 \neq 2$.

Relacija ρ nije ni relacija ekvivalencije ni relacija parcijalnog uređaja budući da nije tranzitivna.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 6.

(a) (2 boda) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuća funkcija, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$h(x) := f(x) - 4g(x) \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Je li funkcija h strogo rastuća, strogo padajuća ili ne mora biti ništa od navedenoga?

(b) (3 boda) Dokažite da je funkcija $f : \langle -\infty, 0 \rangle \to \left\langle -\frac{3}{2}, 1 \right\rangle$ definirana s

$$f(x) = \frac{x^8 - 3}{x^8 + 2}$$

surjekcija.

Rješenje.

(a) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $x_1 < x_2$. Po pretpostavci iz zadatka vrijedi

$$\begin{aligned} f(x_1) &> f(x_2), \\ g(x_1) &< g(x_2). \end{aligned}$$

Pomnožimo li drugu nejednadžbu brojem -4, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1) &> f(x_2), \\ -4g(x_1) &> -4g(x_2). \end{aligned}$$

Nejednakosti s istim znakom smijemo zbrojiti, iz čega slijedi

$$f(x_1) - 4g(x_1) > f(x_2) - 4g(x_2).$$

Iz ovoga slijedi $h(x_1) > h(x_2)$. Prema tome, funkcija h je strogo padajuća funkcija.

(b) Neka je $y \in \left\langle -\frac{3}{2}, 1 \right\rangle$. Treba pronaći $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ za koji vrijedi

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^8 - 3}{x^8 + 2} = y \,\Big|\, \cdot (x^8 + 2) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^8 - 3 = yx^8 + 2y \\ \Leftrightarrow\ & (1 - y)x^8 = 2y + 3 \,\Big|\, : (1 - y) \neq 0 \text{ (zbog } y \neq 1) \\ \Leftrightarrow\ & x^8 = \frac{2y + 3}{1 - y} \,\Big|\, \sqrt[8]{\ } \\ \Leftrightarrow\ & x = -\sqrt[8]{\frac{2y + 3}{1 - y}}. \end{aligned}$$

U posljednjem retku, prilikom korjenovanja jednakosti osmim korijenom, odabrali smo predznak $-$ obzirom da je $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$; bitno je primijetiti i da je izraz ispod korijena nenegativan (inače korjenovanje ne bi bilo moguće i traženi x iz ovoga raspisa ne bi postojao). Ovim raspisom pokazali smo da je funkcija f surjekcija.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = \log_2(x)^2 - 6|\log_2(x)| + 9$.

(a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f.

(b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}([0,1\rangle)$.

Rješenje. Definirajmo funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 na sljedeći način:

$$f_1(x) := \log_2(x), \quad f_2(x) := |x|, \quad f_3(x) := x - 3, \quad f_4(x) = x^2.$$

Primijetimo da vrijedi $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

(a) Domena funkcije f je $\langle 0, +\infty\rangle$ (jedini uvjet dobivamo po logaritmu u varijabli x) pa tražimo $\mathrm{Im}(f) = f(\langle 0, +\infty\rangle) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(\langle 0, +\infty\rangle) = f_4(f_3(f_2(f_1(\langle 0, +\infty\rangle))))$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_1(\langle 0, +\infty\rangle) &= \mathbb{R}, \\ f_2(\mathbb{R}) &= [0, +\infty\rangle\,, \\ f_3([0, +\infty\rangle) &= [-3, +\infty\rangle\,, \\ f_4([-3, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle\,. \end{aligned}$$

Sveukupno, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty\rangle$.

(b) Opet koristimo rastav $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}([0,1\rangle) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(f_4^{-1}([0,1\rangle))))$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_4^{-1}([0,1\rangle) &= \langle -1, 1\rangle\,, \\ f_3^{-1}(\langle -1, 1\rangle) &= \langle 2, 4\rangle\,, \\ f_2^{-1}(\langle 2, 4\rangle) &= \langle -4, -2\rangle \cup \langle 2, 4\rangle\,, \\ f_1^{-1}(\langle -4, -2\rangle \cup \langle 2, 4\rangle) &= \left\langle 2^{-4}, 2^{-2}\right\rangle \cup \left\langle 2^2, 2^4\right\rangle = \left\langle \frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 4, 16\rangle\,. \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $f^{-1}([0,1\rangle) = \left\langle \frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 4, 16\rangle$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 1.

(a) (1 bod) Napišite semantičku tablicu (tablicu istinitosti) za sud $A \wedge \overline{A}$.

(b) (2 boda) Odredite partitivni skup $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$.

(c) (2 boda) Napišite <u>sve</u> binarne relacije na skupu $X = \{x, y\}$ koje su refleksivne.

Rješenje.

(a)

A	$\overline{\text{A}}$	A $\wedge$ $\overline{\text{A}}$
0	1	0
1	0	0

(b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(c) To su:

- $\{(x, x), (y, y)\}$,
- $\{(x, x), (y, y), (x, y)\}$,
- $\{(x, x), (y, y), (y, x)\}$,
- $\{(x, x), (y, y), (x, y), (y, x)\}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 2.

(a) (1 bod) Skicirajte graf funkcije $f(x) = |x + 1|$.

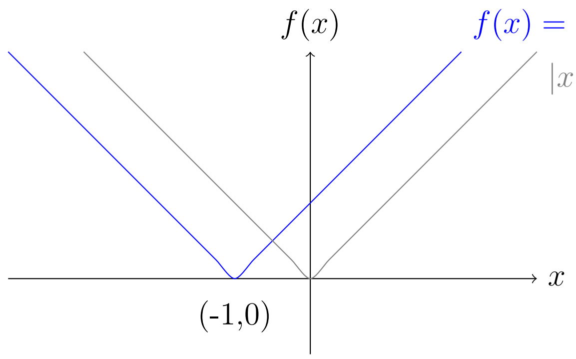
(b) (2 boda) Zbroj $\cos x + \cos y$ prikažite u obliku produkta primjenjujući formulu

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

(c) (2 boda) Izvedite formulu kojom se $\operatorname{ch} 2x$ izražava pomoću $\operatorname{sh} x$.

Rješenje.

(a) Graf tražene funkcije naznačen je plavom bojom, uz pomoćni graf apsolutne vrijednosti $|x|$ kao referentni graf (kojeg translatiramo ulijevo za 1 kako bismo dobili konačno rješenje).



(b) Zapišimo formulu s oznakama α i β umjesto s x i y:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big).$$

Pitamo se za koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x, \\ \alpha - \beta &= y. \end{aligned}$$

Naime, u danoj formuli ćemo uvrštavanjem na desnoj strani jednakosti dobiti željeni izraz $\cos x + \cos y$, a s lijeve strane traženi produkt. Rješavanjem dobivamo da je $\alpha = \frac{x+y}{2}$ i $\beta = \frac{x-y}{2}$. Uvrštavanjem u prvu jednakost koju množimo brojem 2 dobivamo

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

(c) Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(\operatorname{sh} x)^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}.$$

Prema tome, $\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{sh}^2 x + 1$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako njihovi komplementi imaju bar jedan zajednički element, tada su skupovi međusobno disjunktni.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})(A^c \cap B^c \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap B = \emptyset)$$

Ova tvrdnja nije istinita. Naime, za $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ i $B = A$ vrijedi $A^c \cap B^c \neq \emptyset$ i $A \cap B = A \neq \emptyset$.

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})(A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A^c \cap B^c \neq \emptyset).$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako su skupovi međusobno disjunktni, tada njihovi komplementi imaju bar jedan zajednički element.

Ova tvrdnja također nije istinita. Naime, za $A \subset \mathbb{N}$ i $B = A^c$ vrijedi $A \cap B = \emptyset$ i $A^c \cap B^c = A^c \cap A = \emptyset$.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})(A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow A^c \cap B^c = \emptyset)$$

ili riječima:

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako skupovi nisu međusobno disjunktni, tada njihovi komplementi nemaju niti jedan zajednički element.

Budući da je originalna tvrdnja bila neistinita, onda takav mora biti i obrat po kontrapoziciji.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists A, B \subseteq \mathbb{N})(A^c \cap B^c \neq \emptyset \wedge A \cap B \neq \emptyset)$$

ili riječima:

Postoje dva podskupa skupa prirodnih brojeva takva da ni oni ni njihovi komplementi nisu međusobno disjunktni.

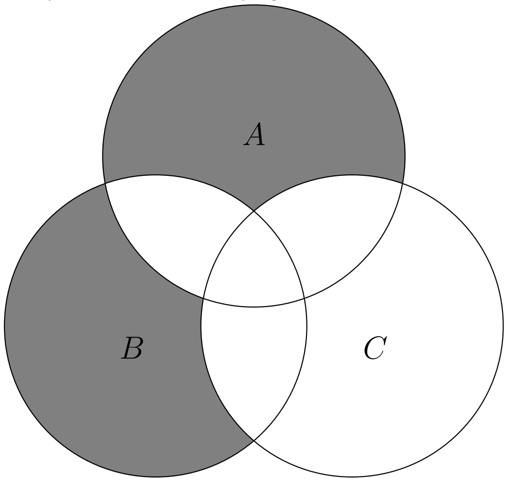
Originalna tvrdnja je bila neistinita pa je onda njena negacija istinita.

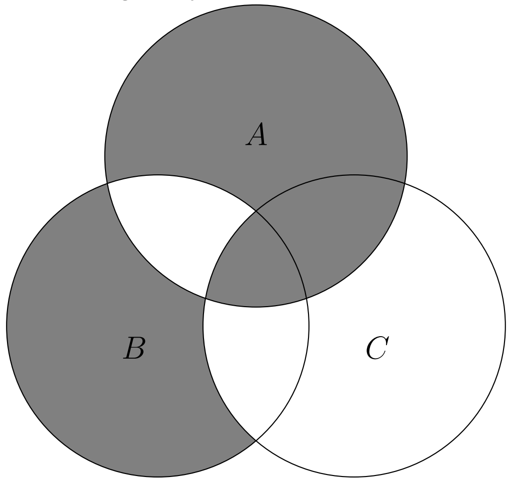
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(A \triangle B) \setminus C$ i $A \triangle (B \setminus C)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $(A \triangle B) \setminus C$ i $A \triangle (B \setminus C)$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $(A \triangle B) \setminus C \subseteq A \triangle (B \setminus C)$ te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito.

Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x \in (A \triangle B) \setminus C$. Tada je $x \in (A \setminus B) \setminus C$ ili $x \in (B \setminus A) \setminus C$. Imamo dva slučaja:

1° Ako je $x \in (A \setminus B) \setminus C$, tada je $x \in A \setminus B$. Kako je $B \setminus C \subseteq B$ slijedi $x \in A \setminus (B \setminus C)$, te $x \in A \triangle (B \setminus C)$.

2° Ako je $x \in (B \setminus A) \setminus C$, tada je $x \in (B \setminus C) \setminus A$, jer je $(B \setminus A) \setminus C = B \cap A^c \cap C^c = B \cap C^c \cap A^c = (B \setminus C) \setminus A$. Slijedi $x \in A \triangle (B \setminus C)$.

Prema tome, uistinu vrijedi inkluzija $(A \triangle B) \setminus C \subseteq A \triangle (B \setminus C)$.

Obratna inkluzija ne vrijedi! Uzmimo, primjerice, $A = \{1\}, B = \emptyset$ i $C = \{1\}$. Tada vrijedi:

- $(A \triangle B) \setminus C = (\{1\} \triangle \emptyset) \setminus \{1\} = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$,
- $A \triangle (B \setminus C) = \{1\} \triangle (\emptyset \setminus \{1\}) = \{1\} \triangle \emptyset = \{1\}$.

Budući da $\emptyset \not\supseteq \{1\}$, na ovom posebnom primjeru zaključujemo da općenito ne vrijedi $(A \triangle B) \setminus C \supseteq A \triangle (B \setminus C)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sa

$$x \; \rho \; y \quad \Longleftrightarrow \quad (y-x)^2 \leq 5.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

Rješenje.

- Refleksivnost: za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x-x)^2 = 0 \leq 5$, pa je prema tome, $x \; \rho \; x$. Budući da to vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$, relacija ρ je refleksivna.
- Simetričnost: neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \; \rho \; y$; tada vrijedi $(y-x)^2 \leq 5$. Uočimo da je tada i $(x-y)^2 \leq 5$, iz čega slijedi $y \rho x$. Prema tome, relacija ρ je simetrična.
- Relacija ρ nije tranzitivna! Primjerice, $(3-1)^2 = 4$ i $(4-3)^2 = 1$, iz čega slijedi $1 \; \rho \; 3$ i $3 \; \rho \; 4$. Međutim, $(4-1)^2 = 9 \geq 5$, prema tome $1 \not\rho \; 4$.
- Relacija ρ nije antisimetrična! Primjerice, $1 \; \rho \; 2$ i $2 \; \rho \; 1$, ali $1 \neq 2$.

Relacija ρ nije ni relacija ekvivalencije ni relacija parcijalnog uređaja budući da nije tranzitivna.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 6.

(a) (2 boda) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuća. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$h(x) := f(x) - 2g(x) \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Je li funkcija h strogo rastuća, strogo padajuća ili ne mora biti ništa od navedenoga?

(b) (3 boda) Dokažite da je funkcija $f : \langle -\infty, 0\rangle \to \langle -5, 1\rangle$ definirana s

$$f(x) = \frac{x^6 - 5}{x^6 + 1}$$

surjekcija.

Rješenje.

(a) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $x_1 < x_2$. Po pretpostavci iz zadatka vrijedi

$$\begin{aligned} f(x_1) &< f(x_2), \\ g(x_1) &> g(x_2). \end{aligned}$$

Pomnožimo li drugu nejednadžbu brojem -2, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1) &< f(x_2), \\ -2g(x_1) &< -2g(x_2). \end{aligned}$$

Nejednakosti s istim znakom smijemo zbrojiti, iz čega slijedi

$$f(x_1) - 2g(x_1) < f(x_2) - 2g(x_2).$$

Iz ovoga slijedi $h(x_1) < h(x_2)$. Prema tome, funkcija h je strogo rastuća funkcija.

(b) Neka je $y \in \langle -5, 1\rangle$. Treba pronaći $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ za koji vrijedi

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^6 - 5}{x^6 + 1} = y \,\Big|\, \cdot (x^6 + 1) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^6 - 5 = yx^6 + y \\ \Leftrightarrow\ & (1 - y)x^6 = y + 5 \,\Big|\, : (1 - y) \neq 0 \text{ (zbog } y \neq 1) \\ \Leftrightarrow\ & x^6 = \frac{y + 5}{1 - y} \,\Big|\, \sqrt[6]{\ } \\ \Leftrightarrow\ & x = -\sqrt[6]{\frac{y + 5}{1 - y}}. \end{aligned}$$

U posljednjem retku, prilikom korjenovanja jednakosti šestim korijenom, odabrali smo predznak $-$ obzirom da je $x \in \langle -\infty, 0\rangle$; bitno je primijetiti i da je izraz ispod korijena nenegativan (inače korjenovanje ne bi bilo moguće i traženi x iz ovoga raspisa ne bi postojao). Ovim raspisom pokazali smo da je funkcija f surjekcija.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 21. studenog 2018.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = \log_3(x)^2 - 4|\log_3(x)| + 4$.

(a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f.

(b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}([0,1\rangle)$.

Rješenje. Definirajmo funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 na sljedeći način:

$$f_1(x) := \log_3(x), \quad f_2(x) := |x|, \quad f_3(x) := x - 2, \quad f_4(x) = x^2.$$

Primijetimo da vrijedi $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

(a) Domena funkcije f je $\langle 0, +\infty\rangle$ (jedini uvjet dobivamo po logaritmu u varijabli x) pa tražimo $\mathrm{Im}(f) = f(\langle 0,+\infty\rangle) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(\langle 0,+\infty\rangle) = f_4(f_3(f_2(f_1(\langle 0,+\infty\rangle))))$. Računamo:

$$\begin{aligned}
f_1(\langle 0,+\infty\rangle) &= \mathbb{R},\\
f_2(\mathbb{R}) &= [0,+\infty\rangle\,,\\
f_3([0,+\infty\rangle) &= [-2,+\infty\rangle\,,\\
f_4([-2,+\infty\rangle) &= [0,+\infty\rangle\,.
\end{aligned}$$

Sveukupno, $\mathrm{Im}(f) = [0,+\infty\rangle$.

(b) Opet koristimo rastav $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}([0,1\rangle) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(f_4^{-1}([0,1\rangle))))$. Računamo:

$$\begin{aligned}
f_4^{-1}([0,1\rangle) &= \langle -1,1\rangle\,,\\
f_3^{-1}(\langle -1,1\rangle) &= \langle 1,3\rangle\,,\\
f_2^{-1}(\langle 1,3\rangle) &= \langle -3,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle\,,\\
f_1^{-1}(\langle -3,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle) &= \left\langle 3^{-3}, 3^{-1}\right\rangle \cup \left\langle 3, 3^3\right\rangle = \left\langle \frac{1}{27}, \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3,27\rangle\,.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $f^{-1}([0,1\rangle) = \left\langle \frac{1}{27}, \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3,27\rangle$.