# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 1.**

(i) (2 boda) Iskažite teorem o dijeljenju s ostatkom za polinome.

(ii) (3 boda) Iskažite aksiom potpunosti.

*Rješenje.* Iskazi teorema o dijeljenju s ostatkom za polinome i aksioma potpunosti nalaze se u skripti.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 2.**

(i) (3 boda) Odredite sve polinome stupnja 4 s realnim koeficijentima kojima je jedina realna nultočka $\alpha = 1$, jedna od kompleksnih nultočaka $\beta = 1 + i$ i vodeći koeficijent jednak 1. Odgovor bez obrazloženja vrijedi nula bodova.

(ii) (2 boda) Napišite $w = 1 + \sqrt{3}i$ u trigonometrijskom obliku i napišite sva rješenja jednadžbe $z^7 = w$ u trigonometrijskom obliku. Odgovor bez obrazloženja vrijedi nula bodova.

*Rješenje.*

(i) Neka je $f$ traženi polinom stupnja 4 s realnim koeficijentima. Kako je $\beta = 1+i$ nultočka polinoma $f$ čiji koeficijenti su realni, $\overline{\beta} = 1-i$ je također nultočka od $f$. Zato kvadratni polinom $(x-\beta)(x-\overline{\beta}) = x^2 - 2x + 2$ dijeli $f$. Kako je i $\alpha = 1$ nultočka od $f$, mora biti da $(x-1)(x^2-2x+2)$ dijeli $f$. Odgovarajući kvocijent $q$ je stupnja 1 i zato ima realnu nultočku. Nultočka od $q$ mora biti nultočka od $f$. Po pretpostavci, $\alpha = 1$ je jedina realna nultočka od $f$. Zato je $\alpha = 1$ nultočka od $q$. Dakle $q(x) = C(x-1)$, gdje je $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$. Odatle, $f(x) = C(x-1)^2(x^2-2x+2) = Cx^4 + \cdots$. Konačno $C = 1$ jer je vodeći koeficijent od $f$ jednak 1.

(ii) $\rho = |w| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. $w = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Rješenja jednadžbe $z^7 = w$ dana su formulom $z_k = \sqrt[7]{2}(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k))$, $k = 0, \ldots, 6$, gdje je $\varphi_k = (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)/7 = (6k+1)\pi/21$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 3.** (5 bodova) Neka je $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz definiran s

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da za sve prirodne brojeve vrijedi

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

*Rješenje.* Zadatak ćemo riješiti metodom matematičke indukcije. Bazu indukcije provjeravamo za $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1,$$
$$F_1 F_2 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Dobili smo jednake brojeve, prema tome tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}. \quad (*)$$

Provjerimo vrijedi li ista jednakost i za broj $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 \overset{(*)}{=} F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2} = F_{n+1} F_{(n+1)+1}.$$

Obzirom da i za $n+1$ vrijedi tražena jednakost, gotovi smo s korakom indukcije. Po principu matematičke indukcije zadana jednakost uistinu vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 4.** (5 bodova) Odredite najveću zajedničku mjeru brojeva 1650 i 1365 te pronađite cijele brojeve $k$ i $l$ takve da je tražena najveća zajednička mjera jednaka $1650k + 1365l$.

*Rješenje.*

Po shemi kakvu smo koristili na vježbama za brže određivanje najveće zajedničke mjere te cijelih brojeva $k$ i $l$ dobivamo sljedeću tablicu:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1650 | 1365 | 305 | 125 | 55 | 15 | 10 | 5 | 0 |
| | 1 | 4 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | |
| 119 | −97 | 22 | −9 | 4 | −1 | 1 | 0 | |

Najveća zajednička mjera brojeva 1650 i 1365 iznosi $M(1650, 1365) = 5 = -97 \cdot 1650 + 119 \cdot 1365$, odnosno traženi brojevi su $k = -97$ i $l = 119$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 5.** (5 bodova)

(a) Odredite posljednju znamenku broja $5^{2019} - 3^{2019}$.

(b) Odredite sumu svih koeficijenata uz neparne potencije od $x$ polinoma

$$p(x) = (x^5 - x^4 + 1)^{2019} \left( -6x^{1931} + \frac{11}{2} x^{1211} + \frac{1}{2} \right)^{333}.$$

*Rješenje.*

(a) Treba odrediti ostatak pri dijeljenju zadanog broja brojem 10. Primijetimo:

$$\begin{array}{ll}
5^2 = 25 \equiv 5 \pmod{10}, & 3^2 = 9 \pmod{10}, \\
5^3 = 5^2 \cdot 5 \equiv 5 \cdot 5 = 25 \equiv 5 \pmod{10}, & 3^3 = 27 \equiv 7 \pmod{10}, \\
\cdots & 3^4 = 7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \pmod{10}, \\
5^{2019} = 5^{2018} \cdot 5 \equiv= 5 \cdot 5 = 25 \equiv 5 \pmod{10}, & 3^{2019} = 3^{4 \cdot 504 + 3} = (3^4)^{504} \cdot 3^3 \equiv 1^{504} \cdot 7 = 7 \pmod{10}.
\end{array}$$

Iz ovoga slijedi

$$5^{2019} - 3^{2019} \equiv 5 - 7 = -2 \equiv -2 + 10 = 8 \pmod{10}.$$

Posljednja znamenka zadanog broja jest 8.

(b) Suma svih koeficijenata iznosi $p(1) = 1 \cdot \left( -6 + \frac{11}{2} + \frac{1}{2} \right)^{333} = 0$. Uz to, možemo odrediti i rezultat oduzimanja sume koeficijenata uz parne potencije i sume koeficiijenata uz neparne potencije: $p(-1) = (-1)^{2019} \cdot \left( 6 - \frac{11}{2} + \frac{1}{2} \right)^{222} = -1$. Traženo rješenje je $\frac{p(1) - p(-1)}{2} = \frac{1}{2}$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 6.** (5 bodova) Odredite normirani polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ stupnja 4 koji je djeljiv s $x^2+1$, a pri dijeljenju s $(x-1)^2$ daje ostatak $2x+1$. Odredite ostatak polinoma $f$ pri dijeljenju s $x-2$.

*Rješenje.* Kako je $\mathrm{st}(f)=4$ i $f$ normiran, slijedi da je $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ za neke $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Također, iz uvjeta zadatka imamo

$$\begin{aligned}
&x^2+1|f \;\Rightarrow\; f(i)=f(-i)=0\\
&f(x)=(x-1)^2q(x)+2x+1 \;\Rightarrow\; f(1)=3,\; f'(1)=2.
\end{aligned}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
&f(i)=0 \;\Rightarrow\; 1-ia-b+ic+d=0 \;\Rightarrow\; 1-b+d=0,\; -a+c=0\\
&f(1)=3 \;\Rightarrow\; 1+a+b+c+d=3\\
&f'(1)=2 \;\Rightarrow\; 4+3a+2b+c=2.
\end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo $a=-\frac{5}{2}$, $b=4$, $c=-\frac{5}{2}$ i $d=3$, odnosno

$$f(x)=x^4-\frac{5}{2}x^3+4x^2-\frac{5}{2}x+3.$$

Konačno, ostatak pri dijeljenju polinoma $f$ s $x-2$ jednak je $f(2)=10$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 7.** (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{3x+4}{2x^3+x^2+3x-2}.$$

*Rješenje.* Faktorizirajmo nazivnik tako da prvo provjerimo ima li polinom $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 2$ racionalne nultočke. Svi kandidati za racionalne nultočke su $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2$. Uvrštavanjem vidimo da je $f(\frac{1}{2}) = 0$. Odredimo kvocijent dobiven dijeljenjem polinoma $f$ s $x - \frac{1}{2}$ (npr. Hornerovim algoritmom):

$$f(x) : \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x^2 + 2x + 4.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\frac{3x+4}{2x^3+x^2+3x-2} &= \frac{3x+4}{(x-\frac{1}{2})(2x^2+2x+4)} = \frac{3x+4}{(2x-1)(x^2+x+2)}\\ &= \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2} = \frac{(A+2B)x^2 + (A-B+2C)x + 2A - C}{(2x-1)(x^2+x+2)}.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$3x + 4 = (A+2B)x^2 + (A-B+2C)x + 2A - C, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

odnosno

$$\begin{aligned}&A + 2B = 0\\ &A - B + 2C = 3\\ &2A - C = 4.\end{aligned}$$

Rješavanjem dobivenog sustava dobijemo $A = 2$, $B = -1$ i $C = 0$, pa je

$$\frac{3x+4}{2x^3+x^2+3x-2} = \frac{2}{2x-1} - \frac{x}{x^2+x+2}.$$

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 1.**

(i) (2 boda) Iskažite aksiom matematičke indukcije.

(ii) (3 boda) Iskažite Cantorov aksiom.

*Rješenje.*

Iskazi aksioma matematičke indukcije i Cantorovog aksioma nalaze se u skripti.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 2.**

(i) (3 boda) Odredite sve polinome stupnja 4 s realnim koeficijentima kojem su $\beta_1 = i$ i $\beta_2 = 1 + 2i$ jedne od kompleksnih nultočaka i vodeći koeficijent jednak 1. Odgovor bez obrazloženja vrijedi nula bodova.

(ii) (2 boda) Napišite $w = 1 - i$ u trigonometrijskom obliku i napišite sva rješenja jednadžbe $z^7 = w$ u trigonometrijskom obliku. Odgovor bez obrazloženja vrijedi nula bodova.

*Rješenje.*

(i) Neka je $f$ traženi polinom stupnja 4 s realnim koeficijentima. Kako je $\beta_1 = i$ nultočka polinoma $f$ čiji koeficijenti su realni, $\overline{\beta}_1 = -i$ je također nultočka od $f$. Zato kvadratni polinom $(x - \beta_1)(x - \overline{\beta}_1) = x^2 + 1$ dijeli $f$. Slično, $(x - \beta_2)(x - \overline{\beta}_2) = x^2 - 2x + 5$ dijeli $f$. Odatle, $f(x) = C(x^2+1)(x^2-2x+5) = Cx^4 + \cdots$. Konačno $C = 1$ jer je vodeći koeficijent od $f$ jednak 1.

(ii) $\rho = |w| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{1})^2} = \sqrt{2}$. $w = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} i) = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4})$. Rješenja jednadžbe $z^7 = w$ dana su formulom $z_k = \sqrt[14]{2}(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k))$, $k = 0, \ldots, 6$, gdje je $\varphi_k = (\frac{7\pi}{4} + 2k\pi)/7 = (8k+7)\pi/28$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 3.** (5 bodova) Neka je $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz definiran s

$$L_1 = 1, L_2 = 2,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da za sve prirodne brojeve vrijedi

$$L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 1.$$

*Rješenje.* Zadatak ćemo riješiti metodom matematičke indukcije. Bazu indukcije provjeravamo za $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} L_i^2 = L_1^2 = 1,$$
$$L_1 L_2 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Dobili smo jednake brojeve, prema tome tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 1. \ (*)$$

Provjerimo vrijedi li ista jednakost i za broj $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_i^2 = \sum_{i=1}^{n} L_i^2 + L_{n+1}^2 \overset{(*)}{=} L_n L_{n+1} - 1 + L_{n+1}^2 = L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) - 1 = L_{n+1} L_{n+2} - 1 = L_{n+1} L_{(n+1)+1} - 1.$$

Obzirom da i za $n+1$ vrijedi tražena jednakost, gotovi smo s korakom indukcije. Po principu matematičke indukcije zadana jednakost uistinu vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 4.** (5 bodova) Odredite najveću zajedničku mjeru brojeva 3115 i 2045 te pronađite cijele brojeve $k$ i $l$ takve da je tražena najveća zajednička mjera jednaka $3115k + 2045l$.

*Rješenje.*

Po shemi kakvu smo koristili na vježbama za brže određivanje najveće zajedničke mjere te cijelih brojeva $k$ i $l$ dobivamo sljedeću tablicu:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3115 | 2045 | 1070 | 975 | 95 | 25 | 20 | 5 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 10 | 3 | 1 | 4 | |
| 131 | $-86$ | 45 | $-41$ | 4 | $-1$ | 1 | 0 | |

Najveća zajednička mjera brojeva 3115 i 2045 iznosi $M(3115, 2045) = 5 = -86 \cdot 3115 + 131 \cdot 2045$, odnosno traženi brojevi su $k = -86$ i $l = 131$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 5.** (5 bodova)

(a) Odredite posljednju znamenku broja $7^{2019} - 6^{2019}$.

(b) Odredite sumu svih koeficijenata uz neparne potencije od $x$ polinoma

$$p(x) = (x^4 - x^3 - 1)^{2019} \left(8x^{1319} - \frac{15}{2}x^{703} + \frac{1}{2}\right)^{222}.$$

*Rješenje.*

(a) Treba odrediti ostatak pri dijeljenju zadanog broja brojem 10. Primijetimo:

$$\begin{aligned}
&7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10}, && 6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10},\\
&7^3 = 9 \cdot 7 = 63 \equiv 3 \pmod{10}, && 6^3 = 6^2 \cdot 6 \equiv 6 \cdot 6 = 36 \equiv 6 \pmod{10},\\
&7^4 = 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10}, && \cdots\\
&7^{2019} = 7^{4\cdot 504+3} = (7^4)^{504} \cdot 7^3 \equiv 1^{504} \cdot 3 = 3 \pmod{10}, && 6^{2019} = 6^{2018} \cdot 6 \equiv= 6 \cdot 6 = 36 \equiv 6 \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi

$$7^{2019} - 6^{2019} \equiv 3 - 6 = -3 \equiv -3 + 10 = 7 \pmod{10}.$$

Posljednja znamenka zadanog broja jest 7.

(b) Suma svih koeficijenata iznosi $p(1) = (-1)^{2019} \cdot \left(8 - \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\right)^{333} = -1$. Uz to, možemo odrediti i rezultat oduzimanja sume koeficijenata uz parne potencije i sume koeficiijenata uz neparne potencije: $p(-1) = 1 \cdot \left(-8 + \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\right)^{222} = 0$. Traženo rješenje je $\frac{p(1) - p(-1)}{2} = -\frac{1}{2}$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 6.** Odredite normirani polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ stupnja 4 koji je djeljiv s $(x-1)^2$, a pri dijeljenju s $x^2+1$ daje ostatak $2x+1$. Odredite ostatak polinoma $f$ pri dijeljenju s $x-2$.

*Rješenje.* Kako je $\mathrm{st}(f) = 4$ i $f$ normiran, slijedi da je $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Također, iz uvjeta zadatka imamo

$$\begin{aligned}
&(x-1)^2 | f \;\Rightarrow\; f(1) = f'(1) = 0 \\
&f(x) = (x^2+1)q(x) + 2x + 1 \;\Rightarrow\; f(i) = 2i + 1,\; f(-i) = -2i + 1.
\end{aligned}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
&f(1) = 0 \;\Rightarrow\; 1 + a + b + c + d = 0 \\
&f'(1) = 0 \;\Rightarrow\; 4 + 3a + 2b + c = 0 \\
&f(i) = 2i + 1 \;\Rightarrow\; 1 - ia - b + ic + d = 2i + 1 \;\Rightarrow\; 1 - b + d = 1,\; -a + c = 2.
\end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{2}$ i $d = 0$, odnosno

$$f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x.$$

Konačno, ostatak pri dijeljenju polinoma $f$ s $x-2$ jednak je $f(2) = 5$.

# UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2019.

**Zadatak 7.** (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{4x^2+9}{4x^3-3x^2+7x+2}.$$

*Rješenje.* Faktorizirajmo nazivnik tako da prvo provjerimo ima li polinom $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x + 2$ racionalne nultočke. Svi kandidati za racionalne nultočke su $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 4, \pm\frac{1}{4}$. Uvrštavanjem vidimo da je $f(\frac{-1}{4}) = 0$. Odredimo kvocijent dobiven dijeljenjem polinoma $f$ s $x + \frac{1}{4}$ (npr. Hornerovim algoritmom):

$$f(x) : \left(x + \frac{1}{4}\right) = 4x^2 - 4x + 8.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+9}{4x^3-3x^2+7x+2} &= \frac{4x^2+9}{(x+\frac{1}{4})(4x^2-4x+8)} = \frac{4x^2+9}{(4x+1)(x^2-x+2)}\\ &= \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2} = \frac{(A+4B)x^2+(-A+B+4C)x+2A+C}{(4x+1)(x^2-x+2)}.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$4x^2 + 9 = (A+4B)x^2 + (-A+B+4C)x + 2A + C, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

odnosno

$$\begin{aligned}&A + 4B = 4\\ &-A + B + 4C = 0\\ &2A + C = 9.\end{aligned}$$

Rješavanjem dobivenog sustava dobijemo $A = 4$, $B = 0$ i $C = 1$, pa je

$$\frac{3x+4}{2x^3+x^2+3x-2} = \frac{4}{4x+1} + \frac{1}{x^2-x+2}.$$