UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) U jednom odjeljenju od 30 učenika odgovaralo je: 21 učenik matematiku, 17 učenika fiziku, 12 učenika informatiku, 10 učenika matematiku i fiziku, 6 učenika matematiku i informatiku, 6 učenika fiziku i informatiku, a 2 učenika sva tri predmeta. Koliko učenika je:

(i) odgovaralo informatiku, ali ne i matematiku,

(ii) odgovaralo točno dva predmeta od tri moguća,

(iii) odgovaralo samo jedan predmet?

(b) (2 boda) Na skupu $S = \{-3, -2, 0, 3, 5, 7\}$ definirana je binarna relacija ρ sa $x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Napišite sve elemente relacije ρ.

Rješenje.

(a) (i) 6.

(ii) 16.

(iii) 12.

(b) $\rho = \{(-3,-3), (-2,-2), (0,0), (3,3), (5,5), (7,7), (-3,3), (3,-3)\}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 2.

(a) (3 boda) Zadana je permutacija

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

skupa $\{a, b, c\}$. Odredite f^2, f^3 i f^{-1}. Ovdje f^2 označava $f \circ f$, a f^3 označava $f \circ f \circ f$.

(b) (2 boda) Funkciju $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^2 + 1$ napišite kao zbroj jedne parne i jedne neparne funkcije.

Rješenje.

(a) (3 boda) Zadana je permutacija

$$f^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, f^3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

(b) $f(x) = \underbrace{-4x^4 + x^2 + 1}_{\text{parna}} + \underbrace{3x^5}_{\text{neparna}}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako je barem jedan od ta dva broja paran, onda je potencija broja dva kojoj je eksponent produkt ta dva broja dijeljiva s četiri.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})((2|m \ \vee \ 2|n) \implies 4|2^{mn}).$$

Ova tvrdnja je istinita. Naime, ako je barem jedan od brojeva m i n paran, onda je i njihov produkt mn paran, pa je specijalno $mn \geq 2$. Slijedi, $2^{mn} = 4 * 2^{mn-2}$ iz čega dobivamo da 4 dijeli 2^{mn}.

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(4|2^{mn} \implies (2|m \ \vee \ 2|n)).$$

ili riječima:

Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako je potencija broja dva kojoj je eksponent produkt ta dva broja dijeljiva s četiri, onda je barem jedan od ta dva broja paran.

Ova tvrdnja nije istinita. Naime, za $m = 1$ i $n = 3$ imamo $4|2^3$, ali m i n očito nisu parni.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(4 \not| \, 2^{mn} \implies (2 \not| \, m \ \wedge \ 2 \not| \, n)).$$

ili riječima:

Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako potencija broja dva kojoj je eksponent produkt ta dva broja nije dijeljiva s četiri, onda su oba broja neparna.

Budući da je originalna tvrdnja bila istinita, onda takav mora biti i obrat po kontrapoziciji.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists m, n \in \mathbb{N})((2|m \ \vee \ 2|n) \ \wedge \ 4 \not| \, 2^{mn}).$$

ili riječima:

Postoje dva prirodna broja takvi da je barem jedan od njih paran i da potencija broja dva kojoj je eksponent njihov produkt nije dijeljiva s četiri.

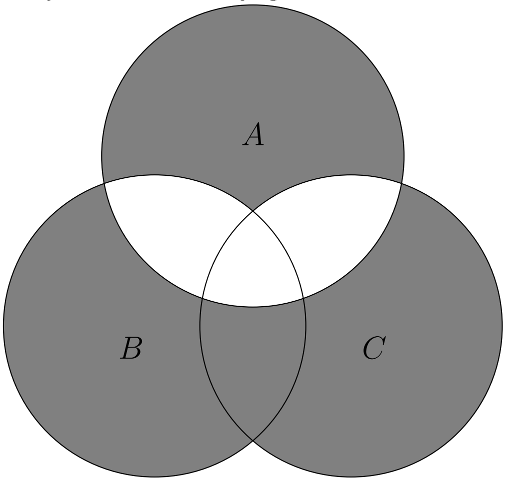
Originalna tvrdnja je bila istinita pa je onda njena negacija neistinita.

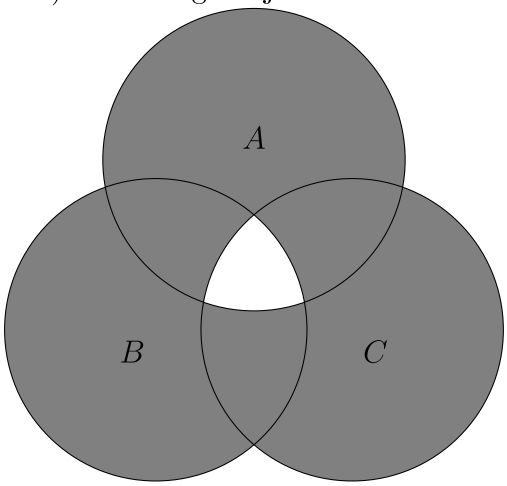
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $A \triangle (B \cup C)$ i $(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $A \triangle (B \cup C)$ i $(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $A \triangle (B \cup C) \subseteq (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$ te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito.

Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x \in A \triangle (B \cup C)$. Tada je $x \in A \setminus (B \cup C)$ ili $x \in (B \cup C) \setminus A$, a iz drugog izraza direktno slijedi $x \in B \setminus A$ ili $x \in C \setminus A$. Imamo tri slučaja:

1° Ako je $x \in A \setminus (B \cup C)$, tada je $x \in A$ i $x \notin B \cup C$, tj. $x \in A$ i $x \notin B$ i $x \notin C$. Posebno, vrijedi $x \in A$ i $x \notin B$, odnosno $x \in A \setminus B$, pa je i $x \in A \triangle B$ te $x \in (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.

2° Ako je $x \in B \setminus A$, tada je $x \in A \triangle B$, pa je $x \in (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.

3° Ako je $x \in C \setminus A$, tada je $x \in A \triangle C$, pa je $x \in (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.

Prema tome, uistinu vrijedi inkluzija $A \triangle (B \cup C) \subseteq (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$

Obratna inkluzija ne vrijedi! Uzmimo, primjerice, $A = \{1\}, B = \emptyset$ i $C = \{1\}$. Tada vrijedi:

- $A \triangle (B \cup C) = \{1\} \triangle (\emptyset \cup \{1\}) = \{1\} \triangle \{1\} = \emptyset$,
- $(A \triangle B) \cup (A \triangle C) = (\{1\} \triangle \{1\}) \cup (\{1\} \triangle \emptyset) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$.

Budući da $\{1\} \nsubseteq \emptyset$, na ovom posebnom primjeru zaključujemo da općenito ne vrijedi $(A \triangle B) \cup (A \triangle C) \subseteq A \triangle (B \cup C)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sa

$$x \ \rho \ y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin x \leq \sin y.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

Rješenje.

- Refleksivnost: za svaki $x \in \mathbb{R}$ očito vrijedi $\sin x \leq \sin x$, pa je $x \ \rho \ x$. Slijedi da je relacija refleksivna.
- Relacija nije simetrična! Uzmimo primjerice $x = 0$ i $y = \frac{\pi}{2}$. Očito je $x \rho y$ ali nije $y \rho x$.
- Tranzitivnost: Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$ proizvoljni brojevi takvi da je $x \rho y$ i $y \rho z$. Tada je po definiciji relacije ρ $\sin x \leq \sin y$ i $\sin y \leq \sin z$, pa je i $\sin x \leq \sin z$, tj. $x \rho z$, dakle, relacija je tranzitivna.
- Relacija ρ nije antisimetrična! Primjerice, $0 \ \rho \ \pi$ i $\pi \ \rho \ 0$, ali $0 \neq \pi$.

Relacija ρ nije ni relacija ekvivalencije ni relacija parcijalnog uređaja jer nije simetrična ni antisimetrična.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 6.

(a) (3 boda) Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) := \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}.$$

injekcija.

(b) (2 boda) Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija dana s $h(x) := 3^x$. Zapišite pravilo pridruživanja za funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da vrijedi $f = g \circ h$ (pri čemu je f funkcija iz (a) dijela zadatka) te se uvrštavanjem uvjerite da je funkcija g ispravno određena.

Rješenje.

(a) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
\Rightarrow \frac{3^{x_1} - 3^{-x_1}}{3^{x_1} + 3^{-x_1}} &= \frac{3^{x_2} - 3^{-x_2}}{3^{x_2} + 3^{-x_2}} \\
\Rightarrow 3^{x_1+x_2} + 3^{x_1-x_2} - 3^{x_2-x_1} - 3^{-x_1-x_2} &= 3^{x_1+x_2} - 3^{x_1-x_2} + 3^{x_2-x_1} - 3^{-x_1-x_2} \\
\Rightarrow 2 \cdot 3^{x_1-x_2} &= 2 \cdot 3^{x_2-x_1} \\
\Rightarrow 3^{x_1-x_2} &= 3^{x_2-x_1} \\
\Rightarrow x_1 - x_2 &= x_2 - x_1 \\
\Rightarrow 2x_1 &= 2x_2 \\
\Rightarrow x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Prema tome, f je injekcija.

(b) Osim naslućivanjem, postoji zgodan postupak kojim možemo odrediti traženu funkciju, a sve dok je moguće invertirati neke druge funkcije uključene u izrazu.

Tražimo funkciju g za koju vrijedi

$$g(3^x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}.$$

Supstitucijom $t = 3^x$, iz čega bi slijedilo $x = \log_3 t$, slijedi

$$g(t) = \frac{3^{\log_3 t} - 3^{-\log_3 t}}{3^{\log_3 t} + 3^{-\log_3 t}} = \frac{t - 3^{\log_3 t^{-1}}}{t + 3^{\log_3 t^{-1}}} = \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}} = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Tražena formula je $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = x - 2\sqrt{x} - 15$.

(a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f.

(b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}([0, 9\rangle)$.

Rješenje. Definirajmo funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 na sljedeći način:

$$f_1(x) := \sqrt{x}, \quad f_2(x) := x^2 - 2x - 15.$$

Primijetimo da vrijedi $f = f_2 \circ f_1$.

(a) Domena funkcije f je $[0, +\infty\rangle$ (jedini uvjet je određen korijenom) pa tražimo $\mathrm{Im} f = f([0, +\infty\rangle) = (f_2 \circ f_1)([0, +\infty\rangle) = f_2(f_1([0, +\infty\rangle)))$. Računamo:

$$f_1([0, +\infty\rangle) = [0, +\infty\rangle\,, \ \ f_2([0, +\infty\rangle) = [-16, +\infty\rangle\,.$$

Sliku po funkciji f_2 jednostavno odredimo skiciranjem dane kvadratne funkcije. Njeno tjeme je u točki $(1, -16)$ pa je uključeno u skupu $[0, +\infty\rangle$. Sveukupno, $\mathrm{Im} f = [-16, +\infty\rangle$.

(b) Opet koristimo rastav $f = f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}([0, 1\rangle) = f_1^{-1}(f_2^{-1}([0, 9\rangle))$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_2^{-1}([0, 9\rangle) &= \langle -4, -3] \cup [5, 6\rangle\,, \\ f_1^{-1}(\langle -4, -3] \cup [5, 6\rangle) &= [25, 36\rangle\,. \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $f^{-1}([0, 9\rangle) = [25, 36\rangle$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) U jednom odjeljenju od 30 učenika odgovaralo je: 20 učenika matematiku, 18 učenika fiziku, 13 učenika informatiku, 10 učenika matematiku i fiziku, 8 učenika matematiku i informatiku, 5 učenika fiziku i informatiku, a 2 učenika sva tri predmeta. Koliko učenika je:

 (i) odgovaralo fiziku, ali ne i matematiku,

 (ii) odgovaralo točno dva predmeta od tri moguća,

 (iii) odgovaralo samo jedan predmet?

(b) (2 boda) Na skupu $S = \{-5, -2, 0, 3, 5, 7\}$ definirana je binarna relacija ρ sa $x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Napišite sve elemente relacije ρ.

Rješenje.

(a) (i) 8.

 (ii) 17.

 (iii) 11.

(b) $\rho = \{(-5, -5), (-2, -2), (0, 0), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (-5, 5), (5, -5)\}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 2.

(a) (3 boda) Zadana je permutacija

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

skupa $\{a, b, c\}$. Odredite f^2, f^3 i f^{-1}. Ovdje f^2 označava $f \circ f$, a f^3 označava $f \circ f \circ f$.

(b) (2 boda) Funkciju $f(x) = 3x^6 - 4x^3 + x^2 + 1$ napišite kao zbroj jedne parne i jedne neparne funkcije.

Rješenje.

(a) (3 boda) Zadana je permutacija

$$f^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, f^3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

(b) $f(x) = \underbrace{3x^6 + x^2 + 1}_{\text{parna}} + \underbrace{(-4x^3)}_{\text{neparna}}.$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako su oba broja neparna, onda je potencija broja tri kojoj je eksponent produkt ta dva broja dijeljiva s devet.

Rješenje. Danu tvrdnju simbolima zapisujemo kao

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})((2 \nmid m \ \wedge \ 2 \nmid n) \Longrightarrow 9|3^{mn}).$$

Ova tvrdnja nije istinita. Uzmimo $m = n = 1$. Očito su oba broja neparna, ali $3^{mn} = 3$ te $9 \nmid 3$.

Obrat dane tvrdnje je

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(9|3^{mn} \Longrightarrow (2 \nmid m \ \wedge \ 2 \nmid n)).$$

ili riječima:

Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako je potencija broja tri kojoj je eksponent produkt ta dva broja dijeljiva s devet, onda su oba broja neparna.

Ova tvrdnja također nije istinita. Naime, za $m = 1$ i $n = 2$ imamo $9|3^2$, ali n očito nije paran.

Obrat po kontrapoziciji dane tvrdnje je

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(9 \nmid 3^{mn} \Longrightarrow (2|m \ \vee \ 2|n)).$$

ili riječima:

Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako potencija broja tri kojoj je eksponent produkt ta dva broja nije dijeljiva s devet, onda je barem jedan od ta dva broja paran.

Budući da originalna tvrdnja nije bila istinita, onda ni obrat po kontrapoziciji nije istinit.

Negacija dane tvrdnje je

$$(\exists m, n \in \mathbb{N})((2 \nmid m \ \wedge \ 2 \nmid n) \ \wedge \ 9 \nmid 3^{mn}).$$

ili riječima:

Postoje dva prirodna broja koji su oba neparni i takvi da potencija broja tri kojoj je eksponent njihov produkt nije dijeljiva s devet.

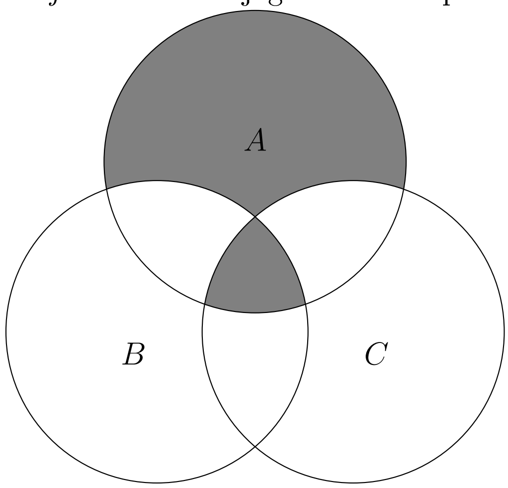
Originalna tvrdnja nije bila istinita pa je onda njena negacija istinita.

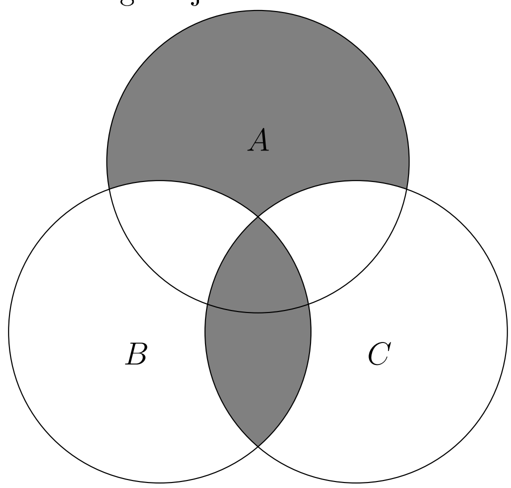
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $A \setminus (B \triangle C)$ i $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \cap C)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $(A \triangle B) \setminus C$ i $A \triangle (B \setminus C)$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama naslućujemo da je $A \setminus (B \triangle C) \subseteq (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \cap C)$ te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito.

Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $A \setminus (B \triangle C)$. Tada je $x \in A$ i $x \notin B \triangle C$. Koristeći identitet $B \triangle C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$, dobivamo $x \in A$ i ($x \notin B \cup C$ ili $x \in B \cap C$). Ako iskoristimo distributivnost logičkog i i ili, dobivamo dva slučaja:

1° $x \in A$ i $x \notin B \cup C$. Drugim riječima, imamo $x \in A \setminus (B \cup C)$, iz čega direktno slijedi $x \in A \setminus (B \triangle C)$.

2° $x \in A$ i $x \in B \cap C$, odnosno, imamo $x \in A \cap B \cap C$, iz čega slijedi $x \in B \cap C$ te $x \in A \setminus (B \triangle C)$

Prema tome, uistinu vrijedi inkluzija $A \setminus (B \triangle C) \subseteq (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \cap C)$.

Obratna inkluzija ne vrijedi! Uzmimo, primjerice, $A = \emptyset,\ B = \{1\}$ i $C = \{1\}$. Tada vrijedi:

- $A \setminus (B \triangle C) = \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$
- $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \cap C) = (\emptyset \setminus \{1\}) \cup \{1\} = \{1\}$.

Budući da $\emptyset \not\supseteq \{1\}$, na ovom posebnom primjeru zaključujemo da općenito ne vrijedi $A \setminus (B \triangle C) \supseteq (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \cap C)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sa

$$x \ \rho \ y \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x \leq \cos y.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

Rješenje.

- Refleksivnost: za svaki $x \in \mathbb{R}$ očito vrijedi $\cos x \leq \cos x$, pa je $x \ \rho \ x$. Slijedi da je relacija refleksivna.
- Relacija nije simetrična! Uzmimo primjerice $x = \frac{\pi}{2}$ i $y = 0$. Očito je $x \rho y$ ali nije $y \rho x$.
- Tranzitivnost: Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$ proizvoljni brojevi takvi da je $x \rho y$ i $y \rho z$. Tada je po definiciji relacije ρ $\cos x \leq \cos y$ i $\cos y \leq \cos z$, pa je i $\cos x \leq \cos z$, tj. $x \rho z$, dakle, relacija je tranzitivna.
- Relacija ρ nije antisimetrična! Primjerice, $0 \ \rho \ 2\pi$ i $2\pi \ \rho \ 0$, ali $0 \neq 2\pi$.

Relacija ρ nije ni relacija ekvivalencije ni relacija parcijalnog uređaja jer nije simetrična ni antisimetrična.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 6.

(a) (3 boda) Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) := \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}.$$

injekcija.

(b) (2 boda) Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija dana s $h(x) := 2^x$. Zapišite pravilo pridruživanja za funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da vrijedi $f = g \circ h$ (pri čemu je f funkcija iz (a) dijela zadatka) te se uvrštavanjem uvjerite da je funkcija g ispravno određena.

Rješenje.

(a) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \Rightarrow \frac{2^{x_1} - 2^{-x_1}}{2^{x_1} + 2^{-x_1}} &= \frac{2^{x_2} - 2^{-x_2}}{2^{x_2} + 2^{-x_2}} \\ \Rightarrow 2^{x_1+x_2} + 2^{x_1-x_2} - 2^{x_2-x_1} - 2^{-x_1-x_2} &= 2^{x_1+x_2} - 2^{x_1-x_2} + 2^{x_2-x_1} - 2^{-x_1-x_2} \\ \Rightarrow 2 \cdot 2^{x_1-x_2} &= 2 \cdot 2^{x_2-x_1} \\ \Rightarrow 2^{x_1-x_2} &= 2^{x_2-x_1} \\ \Rightarrow x_1 - x_2 &= x_2 - x_1 \\ \Rightarrow 2x_1 &= 2x_2 \\ \Rightarrow x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Prema tome, f je injekcija.

(b) Osim naslućivanjem, postoji zgodan postupak kojim možemo odrediti traženu funkciju, a sve dok je moguće invertirati neke druge funkcije uključene u izrazu.

Tražimo funkciju g za koju vrijedi

$$g(3^x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}.$$

Supstitucijom $t = 2^x$, iz čega bi slijedilo $x = \log_2 t$, slijedi

$$g(t) = \frac{2^{\log_2 t} - 2^{-\log_2 t}}{2^{\log_2 t} + 2^{-\log_2 t}} = \frac{t - 2^{\log_2 t^{-1}}}{t + 2^{\log_2 t^{-1}}} = \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}} = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Tražena formula je $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 20. studenog 2019.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = x - 2\sqrt{x} - 24$.

(a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f.

(b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}([-9, 0\rangle)$.

Rješenje. Definirajmo funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 na sljedeći način:

$$f_1(x) := \sqrt{x}, \quad f_2(x) := x^2 - 2x - 24.$$

Primijetimo da vrijedi $f = f_2 \circ f_1$.

(a) Domena funkcije f je $[0, +\infty\rangle$ (jedini uvjet je određen korijenom) pa tražimo $\mathrm{Im} f = f([0, +\infty\rangle) = (f_2 \circ f_1)([0, +\infty\rangle) = f_2(f_1([0, +\infty\rangle)))$. Računamo:

$$f_1([0, +\infty\rangle) = [0, +\infty\rangle\,, \;\; f_2([0, +\infty\rangle) = [-25, +\infty\rangle\,.$$

Sliku po funkciji f_2 jednostavno odredimo skiciranjem dane kvadratne funkcije. Njeno tjeme je u točki $(1, -25)$ pa je uključeno u skupu $[0, +\infty\rangle$. Sveukupno, $\mathrm{Im} f = [-25, +\infty\rangle$.

(b) Opet koristimo rastav $f = f_2 \circ f_1$ i činjenicu $f^{-1}([-9, 0\rangle) = f_1^{-1}(f_2^{-1}([-9, 0\rangle))$. Računamo:

$$\begin{aligned} f_2^{-1}([-9, 0\rangle) &= \langle -4, -3] \cup [5, 6\rangle\,, \\ f_1^{-1}(\langle -4, -3] \cup [5, 6\rangle) &= [25, 36\rangle\,. \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $f^{-1}([-9, 0\rangle) = [25, 36\rangle$.