UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 1.

(i) (3 boda) Iskažite teorem o dijeljenju s ostatkom za cijele brojeve.

(ii) (2 boda) Iskažite Aksiom potpunosti.

Rješenje.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 2.

(i) (3 boda) Odredite sve racionalne nultočke polinoma $x^7 - 5x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$.

(ii) (2 boda) Ako je jedna nultočka polinoma s realnim koeficijentina $z = 1 + i$, koji kvadratni polinom sigurno dijeli taj polinom? Odgovor obrazložite.

Rješenje.

(i) Kako brojnik racionalne nultočke mora dijeliti slobodni koeficijent, a nazivnik vodeći, jedini kandidati za racionalne nultočke su 1 i -1. Uvrštavanjem dobivamo da je jedina racionalna nultočka $\alpha = 1$.

(ii) Ako polinom s realnim koeficijentima ima kompleksnu nultočku z, onda je i njemu konjugirani kompleksni broj $\overline{z}$ također nultočka tog polinoma. Slijedi da je traženi polinom nužno djeljiv s $(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 3. (5 bodova) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova od $\mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s

$$B_1 = A_1, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$A_n = B_1 \cup ... \cup B_n.$$

Rješenje.

Dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$ očito vrijedi tvrdnja. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_n = B_1 \cup ... \cup B_n$. Tada je

$$B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_{n+1} = A_n \cup B_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \setminus A_n) = A_n \cup A_{n+1} = A_{n+1},$$

gdje prva jednakost slijedi iz pretpostavke indukcije, predzadnja iz općenite tvrdnje $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$, a zadnja iz činjenice da je $A_n \subseteq A_{n+1}$. Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 4.

(i) (3 boda) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 234^{56} brojem 7.

(ii) (2 boda) Dokažite da se razlomak $\dfrac{7n+1}{20n+3}$ ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

(i) Vrijedi:

$$\begin{aligned} 234 &\equiv 234 - 210 - 21 = 3 \pmod 7, \\ 234^2 &\equiv 3^2 = 9 \equiv 2 \pmod 7, \\ 234^3 &\equiv 2 \cdot 3 = 6 \equiv -1 \pmod 7. \end{aligned}$$

Prema tome, $234^{56} = 234^{3\cdot 18+2} = (234^3)^{18} \cdot 234^2 \equiv (-1)^{18} \cdot 2 = 2 \pmod 7$ pa je traženi ostatak pri dijeljenju 2.

(ii) Vrijedi

$$\begin{aligned} M(20n+3, 7n+1) &= M(7n+1, 20n+3-2(7n+1)) = M(7n+1, 6n+1) \\ &= M(6n+1, 7n+1-(6n+1)) = M(6n+1, n) = M(n, 6n+1-6n) \\ &= M(n, 1) = 1. \end{aligned}$$

Kako su brojevi $20n+3$ i $7n+1$ relativno prosti brojevi koji god $n \in \mathbb{N}$ odabrali, dani razlomak nije skrativ.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 5. (5 bodova) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma $f(x) = x^3 + 2x$ i $g(x) = x^2 - 2x$.

Rješenje. Dijeljenjem polinoma dobivamo sljedeći račun:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x &= (x+2) \cdot (x^2 - 2x) + 6x, \\ x^2 - 2x &= \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}\right) \cdot 6x. \end{aligned}$$

Prema tome, najveća zajednička mjera danih polinoma je $\frac{1}{6} \cdot 6x = x$ (jer je ona normirani polinom).

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 6. (5 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{400} + 3x^{200} + 4x^{17} + 1$ polinomom $g(x) = x^3 - x^2$.

Rješenje. Prema teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom postoje $q, r \in \mathbb{R}[x]$ za koje vrijedi $f = q \cdot g + r$ te je $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g = 3$. Neka je r oblika $r(x) = ax^2 + bx + c$, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Imamo

$$x^{400} + 3x^{200} + 4x^{17} + 1 = q(x) \cdot x^2(x-1) + ax^2 + bx + c.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ i $x = 1$ dobivamo sljedeće dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} 1 &= c, \\ 9 &= a + b + c. \end{aligned}$$

Derivirajmo jednakost:

$$400x^{399} + 600x^{199} + 68x^{16} = q'(x) \cdot x^2(x-1) + q(x) \cdot 2x(x-1) + q(x) \cdot x^2 + 2ax + b.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo treću jednakost:

$$0 = b.$$

Preko ovih podataka dobivamo $a = 8$ pa je traženi ostatak $r(x) = 8x^2 + 1$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 7. (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x^3 + x^2 + 7x - 2}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

Rješenje.

Uočimo, nultočke kvadratnog polinoma $t^2 + 5t + 4$ su $t_1 = -1$ i $t_2 = -4$. Slijedi, nakon uvođenja supstitucije $t = x^2$ i rješavanja pripadne jednadžbe, $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$. Odavde dobivamo da je rastav oblika

$$\frac{x^3 + x^2 + 7x - 2}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$x^3 + x^2 + 7x - 2 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (4A + C)x + 4B + D.$$

Izjednačavanjem pripadnih koeficijenata i rješavanjem tada dobivenog sustava jednadžbi dobivamo rješenja $A = D = 2$ i $B = C = -1$, odnosno

$$\frac{x^3 + x^2 + 7x - 2}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{2x - 1}{x^2 + 1} - \frac{x - 2}{x^2 + 4}.$$

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 1.

(i) (3 boda) Iskažite teorem o dijeljenju s ostatkom za polinome s realnim koeficijentima.

(ii) (2 boda) Iskažite Arhimedov aksiom.

Rješenje.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 2.

(i) (3 boda) Odredite sve racionalne nultočke polinoma $x^9 - x^5 + 2x^4 - 5x^3 + x^2 + x + 1$.

(ii) (2 boda) Ako je jedna nultočka polinoma s realnim koeficijentina $z = 1 - 2i$, koji kvadratni polinom sigurno dijeli taj polinom? Odgovor obrazložite.

Rješenje.

(i) Kako brojnik racionalne nultočke mora dijeliti slobodni koeficijent, a nazivnik vodeći, jedini kandidati za racionalne nultočke su 1 i -1. Uvrštavanjem dobivamo da je jedina racionalna nultočka $\alpha = 1$.

(ii) Ako polinom s realnim koeficijentima ima kompleksnu nultočku z, onda je i njemu konjugirani kompleksni broj $\overline{z}$ također nultočka tog polinoma. Slijedi da je traženi polinom nužno djeljiv s $(x - (1 - 2i))(x - (1 + 2i)) = x^2 - 2x + 5$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 3. (5 bodova) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova od $\mathbb{R}$. Definirajmo niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s

$$B_1 = A_1, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (A_1 \cup ... \cup A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$A_1 \cup ... \cup A_n = B_1 \cup ... \cup B_n.$$

Rješenje.

Dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$ očito vrijedi tvrdnja. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_1 \cup ... \cup A_n = B_1 \cup ... \cup B_n$. Tada je

$$B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_{n+1} = A_1 \cup ... \cup A_n \cup B_{n+1} = A_1 \cup ... \cup A_n \cup (A_{n+1} \setminus (A_1 \cup ... \cup A_n)) = A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1},$$

gdje prva jednakost slijedi iz pretpostavke indukcije, a zadnja iz općenite tvrdnje $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$. Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 4.

(i) (3 boda) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 136^{79} brojem 7.

(ii) (2 boda) Dokažite da se razlomak $\dfrac{6n+1}{17n+3}$ ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

(i) Vrijedi:

$$\begin{aligned} 136 &\equiv 136 - 70 - 63 = 3 \pmod{7}, \\ 136^2 &\equiv 3^2 = 9 \equiv 2 \pmod{7}, \\ 136^3 &\equiv 2 \cdot 3 = 6 \equiv -1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Prema tome, $136^{79} = 136^{3\cdot 26+1} = (136^3)^{26} \cdot 136 \equiv (-1)^{26} \cdot 3 = 3 \pmod{7}$ pa je traženi ostatak pri dijeljenju 3.

(ii) Vrijedi

$$\begin{aligned} M(17n+3, 6n+1) &= M(6n+1, 17n+3-2(6n+1)) = M(6n+1, 5n+1) \\ &= M(5n+1, 6n+1-(5n+1)) = M(5n+1, n) = M(n, 5n+1-5n) \\ &= M(n, 1) = 1. \end{aligned}$$

Kako su brojevi $17n+3$ i $6n+1$ relativno prosti brojevi koji god $n \in \mathbb{N}$ odabrali, dani razlomak nije skrativ.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 5. (5 bodova) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma $f(x) = x^3 + x$ i $g(x) = x^2 - x$.

Rješenje. Dijeljenjem polinoma dobivamo sljedeći račun:

$$\begin{aligned} x^3 + x &= (x+1) \cdot (x^2 - x) + 2x, \\ x^2 - x &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2x. \end{aligned}$$

Prema tome, najveća zajednička mjera danih polinoma je $\frac{1}{2} \cdot 2x = x$ (jer je ona normirani polinom).

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 6. (5 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{200} + 5x^{100} + 2x^{13} + 1$ polinomom $g(x) = x^3 - x^2$.

Rješenje. Prema teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom postoje $q, r \in \mathbb{R}[x]$ za koje vrijedi $f = q \cdot g + r$ te je $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g = 3$. Neka je r oblika $r(x) = ax^2 + bx + c$, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Imamo

$$x^{200} + 5x^{100} + 2x^{13} + 1 = q(x) \cdot x^2(x-1) + ax^2 + bx + c.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ i $x = 1$ dobivamo sljedeće dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} 1 &= c, \\ 9 &= a + b + c. \end{aligned}$$

Derivirajmo jednakost:

$$200x^{199} + 500x^{99} + 26x^{12} = q'(x) \cdot x^2(x-1) + q(x) \cdot 2x(x-1) + q(x) \cdot x^2 + 2ax + b.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo treću jednakost:

$$0 = b.$$

Preko ovih podataka dobivamo $a = 8$ pa je traženi ostatak $r(x) = 8x^2 + 1$.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2020.

Zadatak 7. (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

Rješenje.

Uočimo, nultočke kvadratnog polinoma $t^2 + 3t + 2$ su $t_1 = -1$ i $t_2 = -2$. Slijedi, nakon uvođenja supstitucije $t = x^2$ i rješavanja pripadne jednadžbe, $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$. Odavde dobivamo da je rastav oblika

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + 2B + D.$$

Izjednačavanjem pripadnih koeficijenata i rješavanjem tada dobivenog sustava jednadžbi dobivamo rješenja $A = 2$, $B = D = 1$, i $C = -1$, odnosno

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x - 1}{x^2 + 2}.$$