UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 26. studenog 2020.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Napišite semantičku jednakost dva suda na kojoj se zasniva metoda dokazivanja koju nazivamo obrat po kontrapoziciji.

(b) (3 boda) Napišite sve funkcije sa S u S ako je $S = \{1, 2\}$. Koje među njima su permutacije? Zatim napišite jednu binarnu relaciju na skupu S koja nije funkcija.

(c) (3 boda) Zadana je funkcija $f(x) = |x - 1| - 4$. Skicirajte graf te funkcije te joj odredite nultočke i sliku.

Rješenje.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 26. studenog 2020.

Zadatak 2. (8 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju, te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je tvrdnja.

Za svaki prirodan broj vrijedi: ako je taj broj kub nekog nekog prirodnog broja, onda je i kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje.

Ako tvrdnju zapišemo simbolima, dobivamo

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(\left((\exists k \in \mathbb{N})\left(n = k^3\right)\right) \implies \left((\exists l \in \mathbb{N})\left(n = l^2\right)\right)\right)$$

Tvrdnja nije istinita jer recimo za $n = 8$ imamo $n = 2^3$, međutim, n nije kvadrat nijednog prirodnog broja. Negacija glasi:

$$(\exists n \in \mathbb{N})\left(\left((\exists k \in \mathbb{N})\left(n = k^3\right)\right) \wedge \left((\forall l \in \mathbb{N})\left(n \neq l^2\right)\right)\right)$$

ili riječima:

Postoji prirodan broj koji je broj kub nekog prirodnog broja, ali nije kvadrat nijednog prirodnog broja.

Tvrdnja je istinita jer je negacija lažne tvrdnje.

Obrat:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(\left((\exists l \in \mathbb{N})\left(n = l^2\right)\right) \implies \left((\exists k \in \mathbb{N})\left(n = k^3\right)\right)\right)$$

ili riječima:

Za svaki prirodan broj vrijedi: ako je taj broj kvadrat nekog prirodnog broja, onda je i kub nekog prirodnog broja.

Tvrdnja nije istinita, možemo uzeti protuprimjer $n = 9$.

Obrat po kontrapoziciji:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(\left((\forall l \in \mathbb{N})\left(n \neq l^2\right)\right) \implies \left((\forall k \in \mathbb{N})\left(n \neq k^3\right)\right)\right)$$

ili riječima:

Za svaki prirodan broj vrijedi: ako taj broj nije kvadrat nekog prirodnog broja, onda nije ni kub nekog prirodnog broja.

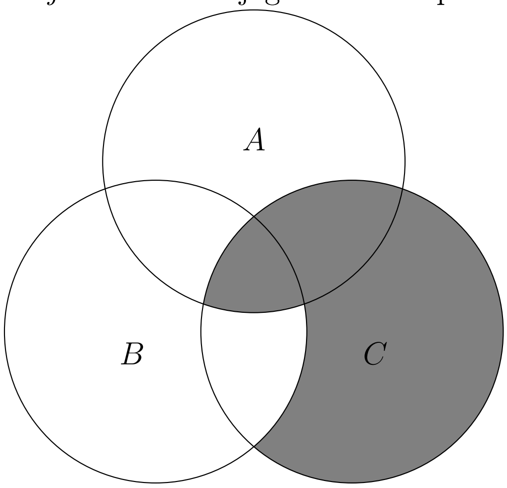
Tvrdnja naravno nije istinita, jer ni početna tvrdnja nije istinita.

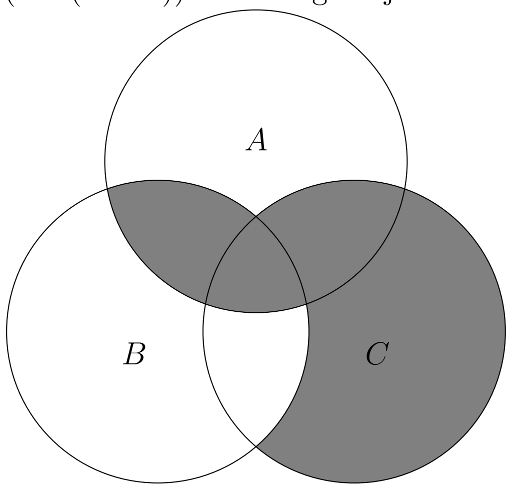
UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 26. studenog 2020.

Zadatak 3. (8 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $C\setminus(B\setminus A)$ i $(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C))$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

Rješenje. Vennovi dijagrami za skupove $C\setminus(B\setminus A)$ i $(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C))$ redom izgledaju ovako.





Iz Vennovih dijagrama (1 bod) naslućujemo da je $C\setminus(B\setminus A)\subset(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C))$ te da obratna inkluzija ne vrijedi općenito. (1 bod)

Dokažimo navedenu inkluziju. Neka je $x\in C\setminus(B\setminus A)$. Tada je $x\in C$ i $x\notin B\setminus A$, odnosno $x\in C$ i $x\in(B\setminus A)^c=(B\cap A^c)^c=B^c\cup A=(B^c\cap A^c)\cup A=(B\cup A)^c\cup A$. (1 bod) Imamo dva slučaja:

1. Neka je $x\in C$ i $x\in(A\cup B)^c$, odnosno $x\in C\setminus(A\cup B)$. Slijedi da je $x\in(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C))$. (1 bod)

2. Neka je $x\in C$ i $x\in A$, odnosno $x\in A\cap C$. Tada je $x\in A\cap(C\cup B)$, odnosno $x\in(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C))$. (1 bod)

Obratna inkluzija ne vrijedi! Uzmimo, primjerice, $A=\{1\},B=\{1\}$ i $C=\emptyset$. (2 boda) Tada vrijedi:

- $C\setminus(B\setminus A)=\emptyset\setminus(\{1\}\setminus\{1\})=\emptyset$,
- $(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C))=(\emptyset\setminus(\{1\}\cup\{1\}))\cup(\{1\}\cap(\{1\}\cup\emptyset))=\emptyset\cup\{1\}=\{1\}$.

Budući da $\{1\}\not\subseteq\emptyset$, na ovom posebnom primjeru zaključujemo da općenito ne vrijedi

$$(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C))\subseteq C\setminus(B\setminus A).$$

.

Uočimo da skupovna jednakost vrijedi za one skupove A, B i C za koje je $A\cap B\cap C^c=\emptyset$. (1 bod) Jedan takav primjer skupova je $A=\{1\},B=\{1\}$ i $C=\{1\}$. Uočimo da za ove skupove vrijedi

$$C\setminus(B\setminus A)=\{1\}\setminus\emptyset=\{1\}=(\{1\}\setminus\{1\})\cup(\{1\}\cap\{1\})=(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap(B\cup C)).$$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 26. studenog 2020.

Zadatak 4. (8 bodova) Neka je $u\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ proizvoljna funkcija koja je injekcija. Na skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$ dana je relacija $\rho \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ s

$$x\rho y \iff u(x) \leq u(y).$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

Rješenje. Provjerimo redom tražena svojstva relacije:

- (1 bod) ρ je refleksivna, jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $u(x) \leq u(x)$, pa je $x\rho x$;
- (2 boda) ρ nije simetrična, jer iz injektivnosti funkcije u slijedi da za sve **različite** $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $u(x) \neq u(y)$ - uzmemo li da je $x\rho y$ slijedi da je $u(x) < u(y)$ pa ne vrijedi da je $y\rho x$;
- (1 bod) ρ je tranzitivna - neka su $x, y, z \in \mathbf{R}$ takvi da je $x\rho y$ i $y\rho z$, odnosno $u(x) \leq u(y)$ i $u(y) \leq u(z)$, tada je nužno i $u(x) \leq u(z)$ odnosno $x\rho z$;
- (2 boda) ρ je antisimetrična, jer za sve $x, y \in \mathbf{R}$ takve da je $x\rho y$ i $y\rho x$ slijedi da je $u(x) \leq u(y)$ i $u(y) \leq u(x)$, odnosno $u(x) = u(y)$, pa po injektivnosti funkcije u nužno vrijedi $x = y$.

Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer nije simetrična (1 bod). Nadalje, relacija je parcijalni uređaj, jer je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna (1 bod).

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 26. studenog 2020.

Zadatak 5. (8 bodova) Zadana je funkcija

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Odredite prirodnu domenu $\mathcal{D}_f$ i sliku $\mathrm{Im}f$ funkcije f. Je li funkcija f injekcija? Ako jest, odredite funkciju $f^{-1} : \mathrm{Im}f \to \mathcal{D}_f$.

Rješenje. Uočimo najprije da vrijedi

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Za domenu, očito moramo izbaciti točku 1. Nadalje, mora vrijediti

$$1 + \frac{2}{x-1} > 0,$$

a rješenje te nejednadžbe je skup $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ što je ujedno i domena funkcije.

Uočimo, (a to se lako dobije i direktnom provjerom), funkcija $1 + \frac{2}{x-1}$ je (strogo padajuća) injekcija, a funkcija ln je strogo rastuća, iz čega slijedi da je kompozicija te dvije funkcije (dakle, funkcija f) strogo padajuća, pa onda i injekcija.

Označimo sada s $g(x) = 1+\frac{2}{x-1}$ i $h(x) = \ln(x)$. Jasno, vrijedi $f = h \circ g$. Uočimo, općenito, slika funkcije g je skup $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a zbog jednadžbe $g(x) > 0$ s kojom smo računali domenu, i činjenice da je g injekcija (odnosno bijekcija ako joj restringiramo sliku), zaključujemo, $g(\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle) = \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$. Kako je h strogo rastuća bijekcija s $\langle 0, +\infty\rangle$ u $\mathbb{R}$, zaključujemo da je $h\left(\langle 0, +\infty\rangle\right) = \mathrm{Im}f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Neka je sada $y \neq 0$. Imamo

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \\ e^y &= 1 + \frac{2}{x-1} \\ e^y - 1 &= \frac{2}{x-1} \\ x &= \frac{2}{e^y - 1} + 1 \end{aligned}$$

Zaključujemo, inverz je dan s $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$

$$f^{-1}(y) = \frac{2}{e^y - 1} + 1$$