UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 11. veljače 2021.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Definirajte supremum nepraznog podskupa u $\mathbb{R}$. Odredite supremum skupa $[0, 1\rangle$. Odgovor obrazložite.

(b) (2 boda) Iskažite teorem o dijeljenju s ostatkom za polinome s racionalnim koeficijentima.

(c) (3 boda) Odredite sva kompleksna rješenja jednadžbe $z^4 = 16$. Odgovor obrazložite.

Rješenje.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 11. veljače 2021.

Zadatak 2. (8 bodova) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih realnih brojeva. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).$$

Rješenje. Koristimo matematičku indukciju.
BAZA: Za $n = 1$ s imamo $a_1^2 \leq a_1^2$ što trivijalno vrijedi.
KORAK: Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1})^2 &= ((a_1 + a_2 + ... + a_n) + a_{n+1})^2 \\
&= (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + ... + a_n) + a_{n+1}^2 \\
&\leq n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + 2a_1a_{n+1} + 2a_2a_{n+1} + ... + 2a_na_{n+1} + a_{n+1}^2 \\
&= (*),
\end{aligned}$$

pri čemu smo u 3. redu koristili pretpostavku indukcije.
Uočimo, za bilo koje x, y vrijedi $2xy \leq x^2 + y^2$ zbog

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
(*) &\leq n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + (a_1^2 + a_{n+1}^2) + (a_2^2 + a_{n+1}^2) + ... + (a_n^2 + a_{n+1}^2) + a_{n+1}^2 \\
&= (n + 1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2)
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 11. veljače 2021.

Zadatak 3.

(a) (4 boda) Odredite najveću zajedničku mjeru brojeva 1750 i 1435 te pronađite cijele brojeve k i l takve da je ta mjera jednaka $1750k + 1435l$.

(b) (4 boda) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ i $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

Rješenje.

(a) Korištenjem Euklidovog algoritma dobije se da je mjera jednaka 35 te $k = -9$ i $l = 11$

(b) Dijeljenjem polinoma dobivamo redom

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x+1)(x^2 - 4x + 9) + (-3x + 9)$$

$$x^2 - 4x + 9 = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) \cdot (-3x + 9)$$

Kako smo dobili ostatak 0, uzimamo zadnji ne-nul ostatak, tj. uzimamo polinom $r(x) = -3x + 9$. Kako najveća zajednička mjera mora biti normiran polinom, rješenje je

$$r(x) = x - 3$$

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 11. veljače 2021.

Zadatak 4. Neka je $f \in \mathbf{Z}[x]$ polinom koji pri dijeljenju s polinomom $x+1$ daje ostatak 2 a pri dijeljenju s polinomom x^2+4 ostatak $-x-4$.

(a) (6 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom $(x+1)(x^2+4)$.

(b) (2 boda) Korištenjem (a) dijela zadatka dokažite da je slobodni član polinoma f paran broj.

Rješenje.

(a) Prema teoremima o dijeljenju s ostatkom znamo da postoje $q, r \in \mathbf{R}[x]$, $st(r) < st((x+1)(x^2+4)) = 3$, takvi da

$$f(x) = q(x) \cdot (x+1)(x^2+4) + r(x), \;\; x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Kako je r polinom najviše stupnja 2, to je $r(x) = ax^2 + bx + c$ za neke $a, b, c \in \mathbf{R}$. Nadalje, iz pretpostavke zadatka znamo da je za neke $q_1, q_2 \in \mathbf{R}[x]$

$$f(x) = q_1(x) \cdot (x+1) + 2 \tag{2}$$
$$f(x) = q_2(x) \cdot (x^2+4) - x - 4. \tag{3}$$

Uvrštavanjem nultočke polinoma $x+1$ u jednakost (2) slijedi da je $f(-1) = 2$, a uvrštavanjem (kompleksnih) nultočaka polinoma x^2+4 u jednakost (3) slijedi da je $f(2i) = -2i-4$ i $f(-2i) = 2i-4$. Sada uvrštavanjem vrijednosti $-1, 2i, -21$ u (1) dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
r(-1) = f(-1) = 2 \;&\Rightarrow\; a - b + c = 2 \\
r(2i) = f(2i) = -2i - 4 \;&\Rightarrow\; -4a + 2ib + c = -2i - 4 \\
r(-2i) = f(-2i) = 2i - 4 \;&\Rightarrow\; -4a - 2ib + c = 2i - 4.
\end{aligned}$$

Rješenje sustava je $a = 1$, $b = -1$ i $c = 0$, pa je traženi ostatak jednak $r(x) = x^2 - x$.

(b) Kako je slobodni član a_0 polinoma f jednak $f(0)$, iz jednakosti (1) i dobivenog izraza za r slijedi da je

$$a_0 = f(0) = q(0) \cdot 1 \cdot 4 + r(0) = 4q(0),$$

prema tome je a_0 nužno paran broj.

UVOD U MATEMATIKU

Drugi kolokvij – 11. veljače 2021.

Zadatak 5. (8 bodova)

(a) (3 boda) Odredite zadnju znamenku broja 7^{2021}.

(b) (5 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke izraz

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + 4x + 4}.$$

Rješenje.

(a) Prvo uočimo da je zadnja znamenka broja jednaka ostatku pri dijeljenju tog broja s 10 te da je $7^2 = 49 \equiv -1(\mathrm{mod} 10)$. Tada je

$$7^{2021} = 7^{2 \cdot 1010 + 1} = 49^{1010} \cdot 7 \equiv (-1)^{1010} \cdot 7 \equiv 7(\mathrm{mod} 10).$$

Stoga je zadnja znamenka broja jednaka 7.

(b) Faktoriziranjem izraza u nazivniku dobijemo da je $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2+4)$. Prema tome, rastav na parcijalne razlomke traženog izraza će biti oblika

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

za neke $A, B, C \in \mathbf{R}$. Kako je

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + (4A + C)}{(x+1)(x^2+4)},$$

nužno je (za sve $x \neq 1$)

$$x^2 - x = (A+B)x^2 + (B+C)x + (4A+C),$$

pa po korolaru o jednakosti polinoma traženi brojevi A, B, C zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ B + C &= -1 \\ 4A + C &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{3}{5}$ i $C = -\frac{8}{5}$, pa je

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{x+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3x - 8}{x^2 + 4}.$$