JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Svaki zadatak se rješava na papiru na kojem je zadan (u slučaju potrebe, zamolite dežurnog asistenta za dodatan papir).

Zadatak 1.

(a) (1 bod) Ako su sudovi A i C istiniti, ovisi li istinitost suda $(A \vee B) \wedge C$ o istinitosti suda B? Odgovor obrazložite.

(b) (1 bod) Za skup S odredite $S \triangle (S \triangle S)$, gdje je sa $\triangle$ označena simetrična razlika skupova.

(c) (3 boda) Neka je $A = \{a, b\}$. Napišite sve neprazne binarne relacije na skupu A. Koje su od njih funkcije?

(d) (3 boda) Napišite primjer bijektivnog preslikavanja $f\colon [0, 2] \to [1, 3]$. Dokažite da je f bijekcija.

Rješenje.

(a) Ne ovisi, uvijek je istinit. Naime, sud $A \vee B$ je istinit neovisno o istinitosti B zbog istinitosti suda A, a sud $(A \vee B) \wedge C$ je istinit jer su i C i $A \vee B$ istiniti, neovisno o istinitosti suda B.

(b) $S \triangle S = (S \setminus S) \cup (S \setminus S) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,\ S \triangle (S \triangle S) = S \triangle \emptyset = (S \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus S) = S \cup \emptyset = S.$

(c) $\{(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(b,a)\}, \{(b,b)\},$

$\{(a,a),(a,b)\}, \{(a,a),(b,a)\}, \{(a,a),(b,b)\}, \{(b,b),(a,b)\}, \{(b,b),(b,a)\}, \{(a,b),(b,a)\},$

$\{(a,a),(a,b),(b,a)\}, \{(a,a),(a,b),(b,b)\}, \{(a,a),(b,a),(b,b)\}, \{(b,b),(a,b),(b,a)\},$

$\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}.$

Funkcije s domenom A su samo $\{(a,a),(b,a)\}$, $\{(a,a),(b,b)\}$, $\{(a,b),(b,a)\}$ i $\{(a,b),(b,b)\}$ jer je svaki element iz A s nekim elementom iz A u relaciji, a niti jedan element iz A nije u relaciji sa više njih (dva).

(d) Nađemo jednadžbu pravca kroz točke $(0, 1)$ i $(2, 3)$: $y = x + 1$. Dakle, $f : [0, 2] \to [1, 3]$ dana s $f(x) = x + 1$ je bijekcija. Kako je f rastuća te $f(0) = 1$ i $f(2) = 3$, $f([0, 2]) = [1, 3]$ i f je surjekcija. Injektivnost se lako provjeri jer $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 + 1 = x_2 + 1$, povlači da je $x_1 = x_2$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

Zadatak 2.

(a) (4 boda) Napišite negaciju i obrat po kontrapoziciji za sljedeću tvrdnju: *Za svaki prirodni broj* $m > 2$ *vrijedi: ako* m *nije prost, tada postoji prirodni broj* $n > 1$ *koji zadovoljava da je* $n < m$ *i* n *dijeli* m.

(b) (2 boda) Za sudove A i B, je li izjava $(A \vee \overline{B}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ tautologija? Obrazložite pomoću tablica istinitosti.

(c) (2 boda) Provjerite istinitost sudova:

$$1.\ (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 = 1),$$
$$2.\ (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \neq 1).$$

Svoje tvrdnje dokažite.

Rješenje.

(a) Negacija: *Postoji prirodni broj* $m > 2$ *koji nije prost, takav da, za svaki prirodni broj* $n > 1$, *vrijedi da je* $m \leq n$ *ili* n *ne dijeli* m.

Obrat po kontrapoziciji: *Za svaki prirodni broj* $m > 2$ *vrijedi: ako za svaki prirodni broj* $n > 1$ *vrijedi* $m \leq n$ *ili* n *ne dijeli* m, *tada je* m *prost.*

(b) Nije tautologija. Ako je A istinit, a B neistinit, tada je $A \vee \overline{B}$ istinit te $A \Rightarrow B$ neistinit, pa je i dana implikacija neistinita.

(c) Prva tvrdnja je neistinita. Kontraprimjer: npr. za $x = 2$ ne postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da je $4 + y^2 = 1$, jer je y^2 nenegativan za svaki $y \in \mathbb{R}$. Druga tvrdnja je istinita jer je negacija prve.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Dokažite da za proizvoljna tri skupa A, B, C vrijedi skupovna jednakost:

$$(A \cap B) \cup C^c = \big(C \setminus (A \cap B)\big)^c.$$

(b) (3 boda) Odredite koliko ima peteročlanih particija sedmeročlanog skupa.

(c) (3 boda) Neka su $A, B \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Ako skup A ima dva elementa, a skup B tri elementa, koliki su mogući kardinaliteti (broj elemenata) Kartezijevog produkta

$$(A \setminus B) \times (B \setminus A)?$$

Tvrdnje obrazložite.

Rješenje.

(a) Korištenjem DeMorganovih pravila, $(C \setminus (A \cap B))^c = (C \cap (A \cap B)^c)^c = C^c \cup (A \cap B)$.

(b) U peteročlanim particijama 7-clanog skupa, mozemo imati samo tri jednočlana i dva dvočlana skupa, ili jedan tročlani i 4 jednočlana. Dva dvočlana skupa možemo izabrati na $\frac{\frac{7\cdot 6}{2} \cdot \frac{5\cdot 4}{2}}{2} = 105$ načina. Zadnje dijeljenje s 2 radimo zbog toga što poredak kod izbora skupova nije bitan. Jedan tročlani skup možemo izabrati na $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 35$ načina. Dakle, ukupno je 140 takvih particija.

(c) Kako skup A ima dva, a B tri elementa, $A \cap B$ može biti samo 1-član ili 2-član. Ako je $A \cap B$ jednočlan, tada je $A \setminus B$ jednočlan, a $B \setminus A$ dvočlan. Tad je Kartezijev produkt $(A \setminus B) \times (B \setminus A)$ 2-član. Ako je $A \cap B$ dvočlan, tad je $A \setminus B$ prazan, pa je i Kartezijev produkt prazan skup.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

Zadatak 4. Na skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$ dana je relacija $\rho \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ s

$$x \rho y \iff e^{xy^3} \geq 1.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

Rješenje.

Provjerimo redom tražena svojstva relacije: Uočimo najprije, kako je $e^x \geq 1 \iff x \geq 0$ za danu relaciju vrijedi

$$x \rho y \iff xy^3 \geq 0$$

- ρ je refleksivna, jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot x^3 = x^4 \geq 0$, pa je $x \rho x$;
- ρ je simetrična, jer iz $xy^3 \geq 0$ slijedi da su x i y^3, a onda i x i y, istog predznaka. No, x^3 je istog predznaka kao i x pa i y, odnosno, $yx^3 \geq 0$.
- ρ nije tranzitivna (0 je u relaciji sa svima). Konkretno, imamo $1 \rho 0$ $(1 \cdot 0^3 = 0 \geq 0)$ i $0 \rho (-1)$ $(0 \cdot (-1)^3 = 0 \geq 0)$, no 1 i -1 nisu u relaciji.
- ρ nije antisimetrična jer vrijedi npr. $1 \rho 2$ i $2 \rho 1$, ali naravno, $1 \neq 2$.

Relacija ρ nije relacija ekvivalencije niti relacija parcijalnog uređaja jer nije tranzitivna.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 29. studenog 2021.

Zadatak 5. Zadana je funkcija:

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}.$$

Odredite prirodnu domenu D_f i sliku $\operatorname{Im} f$ funkcije f. Je li funkcija f injekcija na prirodnoj domeni? Ako jest, odredite funkciju $f^{-1} : \operatorname{Im} f \to D_f$.

Rješenje.

$\sqrt{e^x}$ je uvijek definiran jer je $e^x > 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Iz $\sqrt{e^x} - 1 > 0$ jednostavnim sređivanjem dobivamo $x > 0$, dok iz uvjeta

$$\ln\left(\sqrt{e^x} - 1\right) \geq 0$$

dobivamo

$$\sqrt{e^x} - 1 \geq 1$$

iz čega sređivanjem slijedi $x \geq \ln 4 = 2\ln 2$. Odavde vidimo da je prirodna domena funkcije skup

$$D_f = [\ln 4, +\infty\rangle.$$

Uz oznake $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3 = x - 1$ i $f_4 = \ln x$, imamo $f = f_2 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Sve funkcije u pitanju su strogo rastuće na svojim prirodnim domenama, pa je i funkcija f strogo rastuća, posebno, injekcija je.

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} f_1\left([\ln 4, +\infty\rangle\right) &= [4, +\infty\rangle \\ f_2\left([4, +\infty\rangle\right) &= [2, +\infty\rangle \\ f_3\left([2, +\infty\rangle\right) &= [1, +\infty\rangle \\ f_4\left([1, +\infty\rangle\right) &= [0, +\infty\rangle \\ f_2\left([0, +\infty\rangle\right) &= [0, +\infty\rangle \end{aligned}$$

Dakle, slika funkcije je skup

$$\operatorname{Im} f = [0, +\infty\rangle$$

Neka je sada $y \geq 0$. Imamo

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\ln\left(\sqrt{e^x} - 1\right)} \\ y^2 &= \ln\left(\sqrt{e^x} - 1\right) \\ e^{y^2} &= \sqrt{e^x} - 1 \\ e^x &= \left(e^{y^2} + 1\right)^2 \\ x &= \ln\left(e^{y^2} + 1\right)^2 = 2\ln\left(e^{y^2} + 1\right) \end{aligned}$$

Zaključujemo, inverz je dan s $f^{-1} : [0, +\infty\rangle \to [\ln 4, +\infty\rangle$

$$f^{-1}(x) = 2\ln\left(e^{y^2} + 1\right)$$

Napomena. Mogli smo invertirati funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 posebno i napraviti kompoziciju u obrnutom redoslijedu od one koja zadaje funkciju f.