

Pete vježbe : Relacije

Teorijski podsjetnik

- Neka su A i B skupovi. Podskup $\rho \subseteq A \times B$ zovemo **relacija**. Ako je $(a, b) \in \rho$, kažemo da je a u relaciji ρ s b i pišemo $a \rho b$. U suprotnom pišemo $a \not\rho b$.
- Neka je ρ relacija na skupu A . Kažemo da je ρ :
 - **refleksivna** ako za svaki $a \in A$ vrijedi $a \rho a$,
 - **simetrična** ako za sve $a, b \in A$ takve da je $a \rho b$ vrijedi $b \rho a$,
 - **antisimetrična** ako za sve $a, b \in A$ takve da je $a \rho b$ i $b \rho a$ vrijedi $a = b$.
 - **tranzitivna** ako za sve $a, b, c \in A$ takve da je $a \rho b$ i $b \rho c$ vrijedi $a \rho c$,
 - **irefleksivna** ako za svaki $a \in A$ vrijedi $a \not\rho a$.
- **Suprotna relacija** od relacije ρ je relacija $\rho^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$.

1. Ispitajte svojstva sljedećih relacija:

- relacija djeljivosti na $\mathbb{N}$,
- relacija djeljivosti na $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
- prazna relacija na skupu $\{1, 2, 3\}$,
- relacija $A \times A$ na proizvoljnom skupu A koji ima barem dva elementa,
- relacija $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (2, 4), (4, 4), (1, 4)\}$ na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Za svaku od sljedećih relacija na skupu realnih brojeva ispitajte njena svojstva:

- | | |
|--|--|
| (a) $x \diamond y \iff x \cdot y = 0$, | (d) $x \otimes y \iff x - y < 5$, |
| (b) $x \delta y \iff x \cdot y \neq 0$, | (e) $x \odot y \iff x^2 + y^2 = 1$, |
| (c) $x \heartsuit y \iff x - y = 1$, | (f) $x \oslash y \iff x^2 + y^2 = 0$. |

3. Neka je ρ relacija na A . Dokažite:

- $\rho = \rho^{-1} \iff \rho$ je simetrična,
- ρ je tranzitivna $\iff \rho^{-1}$ je tranzitivna,
- ρ je antisimetrična $\iff \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$.

4. Ispitajte svojstva relacije ρ definirane na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ s

$$(a, b) \rho (c, d) \iff ad \neq bc.$$

5. Ispitajte svojstva relacije ρ na skupu $\mathbb{N}$ definirane s

$$m \rho n \iff 3m \text{ i } 5n \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju sa } 7.$$

6. Ispitajte svojstva relacije ρ definirane na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dane s

$$A \rho B \iff A \subseteq B \wedge B \setminus A \subseteq N,$$

gdje smo s N označili skup svih neparnih prirodnih brojeva.