Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2024./2025.
https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a/

Tema br. 9:

Algebra u teoriji brojeva

Lukas Novak
lukas.novak@math.hr

1 Primjena linearne algebre u teoriji brojeva

Podsjetimo se par korisnih teorema iz linearne algebre o homogenim sustavima linearnih jednadžbi te na fundamentalni teorem simetričnih polinoma.

Teorem 1. *Homogeni sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

ima samo trivijalno rješenja ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Teorem 2 (Vandermond)**.** *Za kompleksne brojeve x_1, x_2,..., x_n vrijedi*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Teorem 3 (fundamentalan teorem o simetričnim polinomima)**.** *Neka je A prsten i $f \in A[x_1, \dots, x_n]$ simetrični polinom u n varijabli. Tada postoji polinom $g \in A[x_1, \dots, x_n]$ takav da je $f(x_1, \dots, x_n) = g(S_1(x_1, \dots, x_n), \dots, S_n(x_1, \dots, x_n))$ pri čemu je*

$$S_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

k-ta simetrična fundamentalna suma.

Primjer 1. Neka su a_0, a_1, ..., a_{n-1} racionalni brojevi takvi da vrijedi

$$a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + \ldots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} = 0.$$

Dokažite da je $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

Rješenje. Množenjem početne jednadžbe s najmanjim zajedničkim višekratnikom od nazivnika brojeva a_0, a_1, ..., a_{n-1} bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su brojevi a_0, a_1, ..., a_{n-1} cijeli. Ideja je odabrati n različitih realnih brojeva r s kojima ćemo pomnožiti početnu jednadžbu i time dobiti $n \times n$ sustav linearnih jednadžbi s netrivijalnim rješenje, iz čega će onda slijediti da je determinanta matrice sustava 0 te u konačnici dobiti da mora biti $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

Dobre vrijednosti za takve realne brojeve su $r = 1$, $\sqrt[n]{2}$, ..., $\sqrt[n]{2^{n-1}}$. Množenjem početne jednadžbe s tim vrijednostima dolazimo do sustava

$$\begin{cases} a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} = 0, \\ 2a_{n-1} + a_0\sqrt[n]{2} + \cdots + a_{n-2}\sqrt[n]{2^{n-1}} = 0, \\ \vdots \\ 2a_1 + 2a_2\sqrt[n]{2} + \cdots + a_0\sqrt[n]{2^{n-1}} = 0. \end{cases}$$

Uočimo da taj sustav ima netrivijalno rješenja $(1, \sqrt[n]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2^{n-1}})$ pa stoga mora biti

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 2a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_1 & 2a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pogledajmo gornju determinantu modulo 2. Matrica tada postaje gornje trokutasta pa imamo da vrijedi $a_0^n \equiv 0 \pmod 2$, odnosno $a_0 = 2b_0$ za neki cijeli broj b_0.

Uvrštavanjem $a_0 = 2b_0$ u prijašnju determinantu redom imamo

$$0 = \begin{vmatrix} 2b_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 2a_{n-1} & 2b_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_1 & 2a_2 & \cdots & 2b_0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & 2b_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 2a_2 & \cdots & 2b_0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & b_0 \\ 2b_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_2 & 2a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

iz čega slijedi da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & b_0 \\ 2b_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_2 & 2a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ponovno gledanjem zadnje determinante modlulo 2 dobivamo da je $a_1^n \equiv 0 \pmod 2$, tj. $a_1 = 2b_1$ za neki cijeli broj b_1. Gornji postupak možemo dalje ponavljati iz čega dobijemo da je $a_i \equiv 0 \pmod 2$ za sve $i = 0, \ldots, n-1$. Konačno, metodom beskonačnog spusta slijedi da mora biti $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. $\square$

Primjer 2. Neka su a, b i c relativno prosti cijeli brojevi. Dokažite da postoje cijeli brojevi x, y, z, u, v, w takvi da vrijedi

$$a(yw - zv) + b(zu - xw) + c(xv - yu) = 1.$$

Rješenje. Zapišimo jednakosti iz tvrdnje zadatka na sljedeći način

$$1 = a(yw - zv) + b(zu - xw) + c(xv - yu) = a\begin{vmatrix} y & v \\ z & w \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} x & u \\ z & w \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix}.$$

Ovime se zadatak svodi na traženje matrice $A = \begin{pmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{pmatrix}$ takve da je $\det A = 1$. Dokazat ćemo da vrijedi općenitija tvrdnja.

Lema 4. *Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Za svaki vektor $v \in \mathbb{Z}^n$ čije su koordinate relativno proste postoji matrica $A \in M_n(\mathbb{Z})$ kojoj je vektor v prvi stupac i takva da je $\det A = 1$.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po n. Za $n = 2$ tvrdnja direktno slijedi iz Bezoutovog teorema. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n i dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Uzmimo vektor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ s relativno prostim koordinatam.

Neka je $d = \gcd(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Tada su koordinate vektora $v' = (\frac{v_1}{d}, \frac{v_2}{d}, \ldots, \frac{v_n}{d})$ relativno proste pa prema pretpostavci postoji matrica

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{d} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{v_2}{d} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{v_n}{d} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

takva da je $\det A' = 1$.

Nadalje, budući da je $\gcd(d, v_{n+1}) = 1$ prema Bezoutovom teoremu znamo da postoje cijeli brojevi α i β takvi da je $\alpha d + \beta v_{n+1} = 1$. Definirajmo konačno matricu

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -\beta\frac{v_1}{d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & -\beta\frac{v_n}{d} \\ v_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Razvojem determinante po zadnjem retku lagano vidimo da je $\det A = 1$ iz čega slijedi tvrdnja. $\square$

$\square$

Primjer 3. Dokažite da sve cijele brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je broj

$$\prod_{1\le i<j\le n} \frac{a_j - a_i}{j - i}$$

također cijeli.

Rješenje. Izraz $\prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$ je upravo Vandermodnova determinanta pripadne matrice za brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nadalje, uočimo da je $\prod_{1\le i<j\le n} (j - i) = 1! \cdot 2! \cdots (n-1)!$.

Spajanjem gornjih jednakosti redom imamo

$$\prod_{1\le i<j\le n} \frac{a_j - a_i}{j - i} = \frac{1}{1! \cdot 2! \cdots (n-1)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{a_1}{1!} & \frac{a_2}{1!} & \cdots & \frac{a_n}{1!} \\ \frac{a_1^2}{2!} & \frac{a_2^2}{2!} & \cdots & \frac{a_n^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a_2^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{a_n^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{a_1}{1} & \binom{a_2}{1} & \cdots & \binom{a_n}{1} \\ \binom{a_1}{2} & \binom{a_2}{2} & \cdots & \binom{a_n}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{a_1}{n-1} & \binom{a_2}{n-1} & \cdots & \binom{a_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

pri čemu smo zadnju jednakost dobili tako da smo svakom retku redom oduzeli određeni broj prethodnih redaka determinante. Konačno, kako su svi elementi zadnje determinante cijeli brojevi slijedi da je broj $\prod_{1\le i<j\le n} \frac{a_j - a_i}{j - i}$ cijeli broj. $\square$

2 Algebarski cijeli brojevi

Definicija 1. Za kompleksan broj α kažemo da je **algebarski** ako je korijen nekog polinoma s racionalnim koeficijentima. Normirani polinom najmanjeg stupnja s racionalnim koeficijentima kojem je α korijen zovemo **minimalnim polinomom od** α. Za ostale nultočke minimalnog polinoma od α kažemo da su **konjugati od** α.

Napomena 1. Korištenjem teorema o dijeljenju polinoma s ostatkom lagano vidimo da je svaki polinom s racionalnim koeficijentima kojem je α nultočka djeljiv minimalnim polinomom od α. Nadalje, minimalni polinom od α je ireducibilan u $\mathbb{Q}[x]$.

Definicija 2. Kažemo da je kompleksan broj α **algebarski cijeli broj** ako je α korijen nekog normirano polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

Napomena 2. Korištenjem Gaussove leme se može pokazati da je α algebarski cijeli broj ako i samo ako minimalni polinom od α ima cjelobrojne koeficijente.

Teorem 5. *Zbroj ili umnožak dva algebarska (cijela) broja je ponovo algebarski (cijeli) broj.*

Teorem 6. *Jedini racionalni brojevi koji su ujedno i algebarski cijeli brojevi su (racionalni) cijeli brojevi.*

Primjer 4. Dokažite da je broj

$$\sqrt{1013^2+1}+\sqrt{1014^2+1}+\ldots+\sqrt{2025^2+1}$$

iracionala.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $\sqrt{1013^2+1}+\sqrt{1014^2+1}+\ldots+\sqrt{2025^2+1}$ racionalan. Uočimo da je za svaki cijeli broj k broj $\sqrt{k^2+1}$ algebarski cijeli broj jer je korijen polinoma $x^2-(k^2+1)$. Time imamo da je i broj $\sqrt{1013^2+1}+\sqrt{1014^2+1}+\ldots+\sqrt{2025^2+1}$ također algebarski cijeli broj. Kako smo pretpostavili da je on ujedno i racionalan slijedi da je zapravo $\sqrt{1013^2+1}+\sqrt{1014^2+1}+\ldots+\sqrt{2025^2+1}$ cijeli broj. Tada imamo da je i broj

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1013^2+1}+\sqrt{1014^2+1}+\ldots+\sqrt{2025^2+1}-(1013+1014+\ldots+2025)=\\
&(\sqrt{1013^2+1}-1013)+(\sqrt{1014^2+1}-1014)+\ldots+(\sqrt{20235^2+1}-2025)=\\
&\frac{1}{1013+\sqrt{1013^2+1}}+\frac{1}{1014+\sqrt{1014^2+1}}+\ldots+\frac{1}{2025+\sqrt{2025^2+1}}
\end{aligned}$$

također cijeli broj.

Međutim, vrijedi da je

$$0<\frac{1}{1013+\sqrt{1013^2+1}}+\frac{1}{1014+\sqrt{1014^2+1}}+\ldots+\frac{1}{2025+\sqrt{2025^2+1}}<\frac{1013}{1013+\sqrt{1013^2+1}}<1$$

što daje kontradikciju. Dakle, broj $\sqrt{1013^2+1}+\sqrt{1014^2+1}+\ldots+\sqrt{2025^2+1}$ je zaista iracionalan. □

Napomena 3. Gornji primjer je posljedica puno općenitijeg rezultata (koji nema toliko jednostavan dokaz kao prethodni zadatak):

Teorem 7. *Neka su a_1, a_2, …, a_n prirodni brojevi takvi da je*

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}$$

racionalan broj. Tada je svaki a_i kvadrat nekog prirodnog broja.

Primjer 5. Niz $(x_n)_{n\geq 0}$ je definiran rekurzijom $x_{n+4} = x_{n+1} + x_n$ za sve cijele brojeve $n \geq 0$ i početnim uvjetima $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$ i $x_3 = 3$. Dokažite da je za svaki prosti broj p broj x_p djeljiv s p.

Rješenje. Karakteristični polinom gornje rekurzije je $\lambda^4 - \lambda - 1$. Lagano se vidi da karakteristični polinom nema višestrukih nultočaka. Označimo s α_1, α_2, α_3 i α_4 sve njegove nultočke. Tada je $x_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n + C\alpha_3^n + D\alpha_4^n$ za neke kompleksne brojeve A, B, C i D. Nadalje, korištenjem Vieteovih formula se može provjeriti da za koeficijente $A = B = C = D = 1$ su zadovoljeni početni uvjeti rekurzije. Dakle, imamo da je $x_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + \alpha_4^n$.

Sada želimo pokazati da je za svaki prosti broj p broj $\alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \alpha_4^p$ djeljiv brojem p. Gornju tvrdnju ćemo dobiti tako da dokažemo općenitiji rezultat (koji je u neku ruku generalizacija malog Fermatovog teorema).

Lema 8. *Neka je $f(x)$ normirani polinom s cjelobrojnim koeficijentima i neka su x_1, x_2, ..., x_n sve njegove nultočke (ne nužno različite). Tada je broj*

$$N = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p - (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)$$

cijeli broj djeljiv s p za svaki prosti broj p.

Dokaz. Iz fundamentalnog teorema o simetričnim polinomima i Vieteovih formula direktno dobijemo da je N cijeli broj. Preostaje dokazati da je N djeljiv s p. U tu svrhu ćemo najprije dokazati da je broj $\frac{1}{p}\left((x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p - (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)\right)$ algebarski cijeli broj.

Gornju tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po broju nultočaka, tj. po broju n. Za $n = 2$ imamo da je

$$\frac{1}{p}\left((x_1 + x_2)^p - (x_1^p + x_2^p)\right) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} x_1^i x_2^{p-i}.$$

Kako su binomni koeficijenti $\binom{p}{i}$ djeljivi s p za sve $i = 1, 2, \ldots, p-1$ slijedi da je $\frac{1}{p}\left((x_1 + x_2)^p - (x_1^p + x_2^p)\right)$ algebarski cijeli broj jer je dobiven kao zbroj umnožaka algebarskih cijelih brojeva.

Pretpostavimo sada da je $\frac{1}{p}\left((x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p - (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)\right)$ algebarski cijeli broj za neki prirodan broj n, tj. da je

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p - (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p) = p\alpha$$

za neki algebarski cijeli broj α. Iz slučaja $n = 2$ primijenjenog na brojeve $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ i x_{n+1} znamo da je

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})^p - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p - x_{n+1}^p = p\beta$$

za neki algebarski cijeli broj β. Prema tome je

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})^p - (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_{n+1}^p) = p(\alpha + \beta)$$

i kako je $\alpha + \beta$ algebarski cijeli broj, slijedi tvrdnja indukcije.

Konačno, tvrdnja leme slijedi iz činjenice da je $\frac{N}{p}$ racionalan broj koji je ujedno i algebarski cijeli broj pa time nužno mora biti cijeli broj. $\square$

$\square$

Primjer 6. Neka su x i y kompleksni brojevi takvi da je $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ cijeli broj za neka četiri uzastopna prirodna broja n. Dokažite da je $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ cijeli broj za sve prirodne brojeve n.

Rješenje. Označimo s $a_n = \frac{x^n - y^n}{x - y}$ te stavimo $s = x + y$ i $p = xy$.

Iz jednakosti

$$(x^n - y^n) \cdot (x + y) = (x^{n+1} - y^{n+1}) + xy(x^{n-1} - y^{n-1})$$

dobivamo rekurziju $a_{n+1} - sa_n + pa_{n-1} = 0$ za sve prirodne brojeve $n \geq 2$.

Također, iz jednakosti

$$(x^{n+1} - y^{n+1}) \cdot (x^{n-1} - y^{n-1}) - (x^n - y^n)^2 = -x^{n-1}y^{n-1}(x - y)^2$$

dobivamo rekurziju $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = -p^{n-1}$ za sve prirodne brojeve $n \geq 2$.

Neka su k, $k+1$, $k+2$ i $k+3$ uzastopni prirodni brojevi za koje su a_k, a_{k+1}, a_{k+2} i a_{k+3} cijeli brojevi. Tada su $p^k = a_{k+1}^2 - a_{k+2}a_k$ i $p^{k+1} = a_{k+2}^2 - a_{k+3}a_{k+1}$ cijeli brojevi što povlači da je $p = \frac{p^{k+1}}{p^k}$ racionalan broj. Broj p je također i algebarski cijeli broj jer je korijen polinoma $x^k - (a_{k+1}^2 - a_{k+2}a_k)$, iz čega slijedi da je p zapravo cijeli broj.

Nadalje, iz rekurzije $a_{n+1} - sa_n - pa_{n-1} = 0$ indukcijom lagano slijedi da za svaki prirodan broj n vrijedi $a_n = f_n(s)$ gdje je f_n normirani polinom s cjelobrojnim koeficijentima stupnja $n - 1$. Time imamo da je s korijen polinom $f_k(x) - a_k$ iz čega slijedi da je s algebarski cijeli broj. Uočimo da je s također i racionalan jer je $s = \frac{a_{k+2} + pa_k}{a_{k+1}}$. Prema tome, s je zapravo cijeli broj.

Iz relacije $a_n = f_n(s)$ sada konačno slijedi da je a_n cijeli broj za svaki prirodan broj n. $\square$

Primjer 7. Neka su a_1, a_2, $\ldots$, a_k pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k}$$

racionalan broj za sve prirodne brojeve $n \geq 2$. Dokažite da je $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$.

Rješenje. Dokažimo najprije da su a_1, a_2, …, a_k algebarski brojevi i da vrijedi $a_1a_2\cdots a_k = 1$.

Uzmimo prirodan broj $N > k$ i promotrimo brojeve

$$x_1 = \sqrt[N!]{a_1},\ x_2 = \sqrt[N!]{a_2},\ \ldots,\ x_k = \sqrt[N!]{a_k}.$$

Iz uvjeta zadatka imamo da su brojevi $x_1^j + x_2^j + \ldots + x_k^j$ racionalni za sve $j = 1, 2, \ldots, k$. Prema tome imamo da su i simetrične fundamentalne sume $S_1(x_1,\ldots,x_k)$, $S_2(x_1,\ldots,x_k)$, …, $S_k(x_1,\ldots,x_k)$ racionalne, odnosno da polinom $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)$ ima racionalne koeficijente. Time imamo da su brojevi x_1, x_2, …, x_k algebarski pa su samim time i brojevi a_1, a_2, …, a_k algebarski.

Nadalje, kako je broj $x_1x_2\cdots x_k = \sqrt[N!]{a_1a_2\cdots a_k}$ racionalan za sve $N > k$ slijedi da mora biti $a_1a_2\cdots a_k = 1$.

Budući da su brojevi a_1, a_2, …, a_k algebarski slijedi da postoji polinom

$$F(x) = b_rx^r + b_{r-1}x^{r-1} + \ldots + b_0$$

s cjelobrojnom koeficijentima koeficijentima kojem su a_1, a_2, …, a_k korijeni. Uočimo da su tada brojevi b_ra_1, b_ra_2, …, b_ra_k algebarski cijeli brojevi jer su korijeni polinoma

$$G(x) = x^r + b_{r-1}x^{r-1} + b_rb_{r-2}x^{r-2} + \ldots + b_r^{r-1}b_0.$$

Također, za svaki prirodan broj n su i brojevi $\sqrt[n]{b_ra_1}$, $\sqrt[n]{b_ra_2}$, …, $\sqrt[n]{b_ra_k}$ također algebarski cijeli brojevi jer su korijeni polinoma $G(x^n)$.

Time imamo da je

$$b_r\left(\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k}\right) = \sqrt[n]{b_r^{n-1}}\left(\sqrt[n]{b_ra_1} + \sqrt[n]{b_ra_2} + \ldots + \sqrt[n]{b_ra_k}\right)$$

algebarski cijeli broj kao umnožak dva algebarska cijela broja. Budući da iz uvjeta zadatka imamo da je on i racionalan broj, slijedi da mora zapravo biti cijeli broj. Ovime sada imamo niz cijelih brojeva $\left(b_r\left(\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k}\right)\right)_{n\geq 1}$.

Kako gornji niz konvergira prema kb_r, slijedi da postoji prirodan broj N takav da je

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k} = k$$

za sve prirodne brojeve $n \geq N$.

Uočimo da iz $a_1a_2\cdots a_k = 1$ i $\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_k} = k$ slijedi da imamo jednakost kod A–G nejednakosti primijenjene na brojeve $\sqrt[n]{a_1}$, $\sqrt[n]{a_2}$, …, $\sqrt[n]{a_k}$ što povlači da je $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$. $\square$

3 Zadaci za domaću zadaću

Za uspješno polaganje zadaće potrebno je riješiti barem 5 od sljedećih 10 zadataka.
Rok predaje je 14. 7. 2025.

Zadatak 1. Dan je polinom f s kompleksnim koeficijentima. Je li moguće odrediti ima li polinom f dvostruku nultočku koristeći samo operacije zbrajanja, množenja i dijeljenja njegovih koeficijenata?

Zadatak 2. Neka su a, b i c relativno prosti cijeli brojevi različiti od 0. Dokažite da za sve relativno proste cijele brojeve u, v i w koji zadovoljavaju $au + bv + cw = 0$ postoje cijeli brojevi m, n i p tako da vrijedi

$$a = nw - pv, \quad b = pu - mw, \quad c = mv - nu.$$

Zadatak 3. Dokažite da je za sve cijele brojeve a_1, a_2, $\dots$, a_n broj

$$\frac{\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)}{a_1 a_2 \cdots a_n} \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

cijeli broj djeljiv s $1!2! \cdots (n-2)!$.

Zadatak 4.

a) Neka su P i R polinomi s racionalnim koeficijentima i $P \neq 0$. Dokažite da postoji ne-nul polinom Q s racionalnim koeficijentima takav da

$$P(x) \mid Q(R(x)).$$

b) Neka su P i R polinomi s cjelobrojnim koeficijentima i neka je P normirani polinom. Dokažite da postoji normirani polinom Q s cjelobrojnim koeficijentima takav da

$$P(x) \mid Q(R(x)).$$

Zadatak 5. Neka su k i n prirodni brojevi i neka je P polinom stupnja n s koeficijentima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Pretpostavimo da $(x-1)^k \mid P(x)$ i da postoji prost broj q takav da je

$$\frac{q}{\ln q} < \frac{k}{\ln(n+1)}.$$

Dokažite da su svi q-ti korijeni iz jedinice korijeni polinoma P.

Zadatak 6. Dokažite da se niti jedan od brojeva $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, pri čemu je n prirodan broj, ne može zapisati u obliku $2\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)$ za neke cijele brojeve k i m.

Zadatak 7. Neka su a i b racionalni brojevi takvi da je za neki prirodan broj $n \geq 2$ broj $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ racionalan. dokažite da je broj $\sqrt[n]{a}$ također racionalan.

Zadatak 8. Dani su relativno prosti brojevi m i n i realan broj $x > 1$ takav da su brojevi $x^m + \dfrac{1}{x^m}$ i $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ cijeli. Dokažite da je broj $x + \dfrac{1}{x}$ također cijeli broj.

Zadatak 9. Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ različiti prosti brojevi i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ racionalni brojevi takvi da je

$$a_1\sqrt{p_1} + a_2\sqrt{a_2} + \ldots + a_n\sqrt{p_n} = 0.$$

Dokažite da je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Zadatak 10. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi takvi da je $a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$ cijeli broj za sve prirodne brojeve m. Dokažite da je polinom

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \in \mathbb{Z}[x].$$