# STATISTIKA (od trećih vježbi)

prema vježbama doc. dr. sc. Ivana Biočića
LaTeXirala: Petra Daković

akademska godina 2024./25.

## 1 UVOD U VJEROJATNOST

- **Elementarni događaj** = svaki mogući ishod pokusa.
- $\Omega$ = prostor svih elemntarnih događaja.
- $A \subseteq \Omega$ slučajni događaj.

**Primjer 1.1** ***Pokus: bacanje simetričnog novčića***
$\Omega = \{P, G\}$ *(ovdje su* $P$ *i* $G$ *elementarni događaji)*
*(vjerojatnost)* $\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{G\}) = \frac{1}{2}$ *(zbog simetričnosti novčića).*

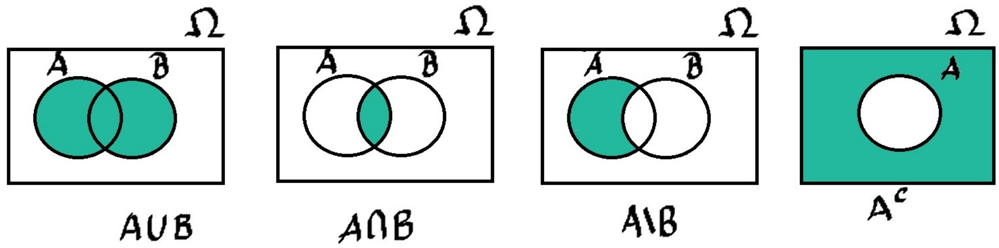
**Primjer 1.2** ***Pokus: bacanje simetrične kockice***
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = ... = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$
*(zbog pretpostavke o simetričnosti kockice svaki je broj* $1, ..., 6$ *jednako vjerojatan).*

Događaje promatramo kao skupove, stoga su nam bitne skupovne operacije.
Neka su $A$ i $B$ događaji.

1) **UNIJA** $A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ ili } x \in B\}$ =dogodio se $A$ ili $B$
2) **PRESJEK** $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ i } x \in B\}$ =dogodio se i $A$ i $B$

3) **RAZIKA** $A \setminus B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ i } x \notin B\}$ =dogodio se $A$, ali nije $B$

4) **KOMPLEMENT** (može se definirati ako je zadan UNIVERZALNI SKUP $\Omega$ u odnosu na koji promatramo komplement skupa)
$A^c = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega | x \notin A\}$ = nije se dogodio $A$




Slika 1: Vennovi dijagrami za $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $A^c$ redom

Kažemo da su $A$ i $B$ **disjunktni** ako $A \cap B = \emptyset$ (tj. događaji $A$ i $B$ ne mogu se istovremeno dogoditi).

**Napomena 1.1** *Primijetimo:* $A \cap B$ *i* $A \setminus B$ *su disjunktni i u uniji daju skup* $A$*, tj.* $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

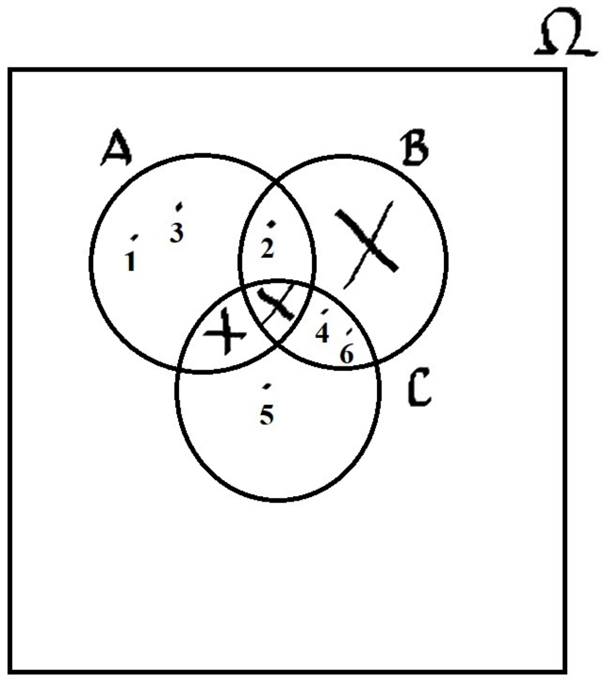
**DZ 1.1** $A \setminus B = A \cap B^c$, $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$.

**De Morganova pravila:** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

**Primjer 1.3** *Na skupu* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *zadani su događaji* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ *i* $C = \{4, 5, 6\}$. *Odredimo* $A^c$, $A \cap B$, $A \cup B$, $(A \setminus B)^c$, $(A \cup C) \cap B$, $C \setminus (A \cup B)$.

***Rješenje:*** *Nacrtajmo prvo Vennov dijagram sa 3 skupa* $A, B$ *i* $C$. *Polja ispunjavamo od "najdetaljnijeg presjeka": najprije provjerimo koji su elementi u* $A \cap B \cap C$*, zatim dopunimo presjeke od po 2 skupa (*$A \cap B$*,* $A \cap C$

*i $B \cap C$) elementima koji im pripadaju, a nisu u $A \cap B \cap C$, te na kraju dopunimo i same skupove $A$, $B$ i $C$ (elementima koji im pripadaju, a nisu ni u jednom presjeku). Na slici 2 sa $X$ je označen prazan skup. Slijedi:*




Slika 2: Ispunjavanje Vennovog dijagrama za skupove iz Primjera 1.3

$A^c = \{4,5,6\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$,
$(A \setminus B)^c = \{1,3\}^c = \{2,4,5,6\} = A^c \cup (A \cap B)$,
$(A \cup C) \cap B = \Omega \cap B = B = \{2,4,6\}$, $C \setminus (A \cup B) = C \setminus \{1,2,3,4,6\} = \{5\}$.

## 1.1 Vjerojatnost događaja

**Svojstva vjerojatnosti:**

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
3) za svaki događaj $A$ vrijedi $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$,
4) za disjunktne događaje $A$ i $B$ vrijedi $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
   NAPOMENA: Gornji izraz se poopćuje za prebrojivo mnogo po parovima disjkunktnih događaja: neka je $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz događaja tako da vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Tada je $\mathbb{P}(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mathbb{P}(A_j)$.
5) $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$
   (jer $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) =$[disjunktni]$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$)
6) za događaje $A$ i $B$ vrijedi $\mathbb{P}(B) =$[disjunktni]$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$
7) ako je $A \subseteq B$, $\mathbb{P}(B\setminus A) =[A\cap B = B]= \mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A) \geq 0$ i $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,
8) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
   (jer $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B \cup A \cap B \cup B \setminus A) =$[disjunktni]$= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(B\setminus A) = (\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B))+\mathbb{P}(A\cap B)+(\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B))$)

Elementarni događaji su disjunktni, stoga je vjerojatnost nekog događaja suma vjerojatnosti elementarnih događaja koje on sadrži.
Elementarni događaji NE moraju svi biti jednako vjerojatni.

**Primjer 1.4** $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = 0.1$,
$\mathbb{P}(\{c\}) = \mathbb{P}(\{e\}) = 0.2, \mathbb{P}(\{d\}) = 0.4$. $A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$.
$\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(A^c) =?$

**Rješenje:**

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\}) = 0.4$
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{c\}) + \mathbb{P}(\{d\}) + \mathbb{P}(\{e\}) = 0.8$
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\{a, b, c, d, e\}) = 1$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{c\}) = 0.2$
$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\{d, e\}) = 0.6 (= 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0.4)$

**Zadatak 1.1** *U jednoj šumi* $10\%$ *drveća su hrastovi, a* $5\%$ *drveća veće je od 35 metara, s tim da je* $3\%$ *drveća hrastovi koji su veći od 35 metara.*

*a) Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrano drvo u šumi nije hrast?*

*b) Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrano drvo veće od 35 metara, a li nije hrast?*

**Rješenje:** Označimo događaje: $A = \{$ odabrano drvo je hrast $\}$,
$B = \{$ odabrano drvo je veće od 35 metara $\}$.
U zadatku je zadano: $\mathbb{P}(A) = 0.1$, $\mathbb{P}(B) = 0.05$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.03$.

a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.9$,

b) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.05 - 0.03 = 0.02$.

**Primjeri PREBROJAVANJA:**

1) [PERMUTACIJE] Na koliko načina možemo bez ponavljanja rasporediti $n$ različitih predmeta na $n$ mjesta, pri čemu nam je bitan poredak smještanja $\rightarrow n!$
npr. $n$ timova na ljestvici, $n$ ljudi na sjedalima u jednom redu (s $n$ sjedala) u kinu

2) [PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM] Na koliko načina možemo na $n$ mjesta poredati $n$ predmeta pri čemu imamo $k$ skupina istih elemenata i vrijedi $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ ($n_i$ je broj elemenata $i$-te vrste, $1 \leq i \leq k$) te nam je bitan poredak $\rightarrow \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$

3) [VARIJACIJE] Na koliko načina možemo bez ponavljanja rasporediti $n$ različitih predmeta na $k < n$ mjesta, pri čemu nam je bitan poredak $\to n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$
npr. na koliko načina možemo od 10 ekipa izabrati 3 pobjedničke (1., 2. i 3. mjesto na ljestvici) - na $10 \cdot 9 \cdot 8$ načina,
npr. koliko različitih troslovnih riječi možemo sastaviti od slova P, R, S, T, E i N - na $6 \cdot 5 \cdot 4$ načina

4) [KOMBINACIJE] Na koliko načina možemo bez ponavljanja od $n$ različitih predmeta odabrati njih $k$ ako nam nije važan poredak $\to \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
npr. biramo 5 karata iz špila, prozivamo 2 studenta pred ploču (i nije nam bitan poredak prozivanja, nego samo koje smo osobe pozvali)

**Napomena 1.2** *Permutacije povezujemo s uređenim n-torkama, a kombinacije sa skupovima: broj uređenih n-torki koje možemo sastaviti od n različitih elementa je* $n!$ *(u uređenim n-torkama je bitan poredak komponenti), a broj k-članih podskupova n-članog skupa je* $\binom{n}{k}$ *(za skup nam nije bitan redoslijed, nego samo koje elemente sadrži).*

**Napomena 1.3** $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = 1$, $0! = 1$.

Ako su svi elentarni događaji jednako vjerojatni, tada vjerojatnost nekog događaja $A$ računamo s

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{broj povoljnih elem. događaja za A}}{\text{ukupan broj elem. događaja}} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

pri čemu je $|A|$ oznaka za kardinalitet (broj elemenata) skupa $A$.

**Zadatak 1.2** *Ana i Branka su u učionici s još 8 studenata. Profesor na slučajan način proziva dvije osobe pred ploču.*

*a) Kolika je vjerojatnost da je profesor prozvao i Anu i Branku?*

*b) Kolika je vjerojatnost da je prozvao Anu ili Branku?*

**Rješenje:** [KOMBINACIJE] U učionici je ukupno 10 studenata. Neka skup $\Omega$ sadrži sve skupove od po dvije različite osobe od njih ukupno 10 (nije nam bitan poredak kojim su učenici prozvani, već samo koji su studenti došli pred ploču - gledamo . Dakle, $|\Omega| = \binom{10}{2} = 45$.

$A = \{$pozvana je Ana (i još jedna osoba)$\}$,
$B = \{$pozvana je Branka (i još jedna osoba)$\}$.
Skupovi $A$ i $B$ sadrže dvočlane podskupove skupa od 10 studenata, pri čemu je u $A$ Ana jedan od elemenata u svakom skupu, a u $B$ je to Branka. Pri određivanju broja elemenata skupova $A$ i $B$, s obzirom da nam je jedan element svakog dvočlanog podskupa zadan, drugi biramo od preostalih 9 studenata. Zato je
$|A| = \binom{9}{1} = 9$.

a) Skup $A \cap B = \{$ pozvane su i Ana i Branka $\} = \{\{$Ana, Branka$\}\}$ sadrži samo onaj dvočlani podkup studenata u kom su i Ana i Branka, pa je $|A \cap B| = 1$, te je $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$.

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9+9-1}{\binom{10}{2}} = \frac{17}{45}$.

**Zadatak 1.3** *Igramo loto* 7/39.

*a) Zaokružili smo 7 brojeva. Kolika je vjerojatnost da dobijemo sedmicu?*

*b) Zaokružili smo 7 brojeva. Kolika je vjerojatnost da dobijemo šesticu?*

*c) Zaokružili smo 8 brojeva. Kolika je vjerojatnost da dobijemo sedmicu?*

**Rješenje:** [KOMBINACIJE] Ovdje nam ponovo nije bitan poredak izvlačenja loptica, već samo koji su brojevi izvučeni.
$\Omega = \{$ svi mogući rezultati izvlačenja $\} = \{$svi sedmeročlani podskupovi skupa od 39 elementata$\}$, $|\Omega| = \binom{39}{7}$.

a) $A = \{$izvučeno je točno naših 7 brojeva$\}$. Skup $A$ sadrži samo jedan sedmeročlani podskup skupa od 39 brojeva na lopticama, stoga je $|A| = 1$ i $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{39}{7}}$, što je zapravo jako mala vjerojatnost.

b) U ovom podzadatku nismo dobili sedmicu, tj. zaokružili smo 7 brojeva, ali naših je pogođeno 6.
$B = \{$izvučeno je 6 od naših 7 brojeva i jedan od preostalih 32=39-7 (brojeva koje mi nismo zaokružili)$\}$. $|B| = \binom{7}{6} \cdot \binom{32}{1} = 7 \cdot 32$ - ovdje množimo binomne koeficijente jer se istovremeno izvuklo 6 od naših 7 i 1 od preostala 32 moguća broja na lopticama. $\mathbb{P}(B) = \frac{32 \cdot 7}{\binom{39}{7}}$.

c) $C = \{$izvučeno je 7 od naših 8 brojeva$\}$. Ovdje se dodatno ne izvlači od preostalih $39 - 8 = 31$ brojeva, jer igramo loto 7/39, a već smo izvukli 7 loptica. $|C| = \binom{8}{7} = 6$, $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{\binom{39}{7}}$.

**Zadatak 1.4** *Među slovima riječi MATEMATIKA biramo 3 slova i slažemo ih u novu troslovnu "riječ"(taj niz slova ne mora postojati kao riječ u hrvatskom jeziku). Koja je vjerojatnost da smo dobili riječ MAK?*

**Rješenje:** U ovom zadatku nemamo točno ni permutacije (jer ne koristimo sva slova da bismo dobili riječ MAK), ni varijacije (jer nemamo sva slova različita). No, svakako je bitan poredak slova u riječi. Zadatak možemo riješiti preko varijacija, ali onda moramo razlikovati sva slova. U riječi MATEMATIKA imamo 2 slova M (da bismo ih razlikovali, označit ćemo ih s $M_1$ i $M_2$), 3 slova A ($A_1$, $A_2$ i $A_3$), 2 slova T ($T_1$ i $T_2$), te po jedno slovo K, E i I. [VARIJACIJE] Uz uvedene razlikovne oznake, imamo 10 slova $(M_1, A_1, T_1, E, M_2, A_2, T_2, I, K, A_3)$.
$\Omega = \{$svi rasporedi 10 različitih slova na 3 mjesta$\}$ , $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$. No, sad moramo pobrojati koliko nam je povoljnih elementarnih događaja za događaj $A = \{$dobili smo riječ MAK$\}$. To su $M_1A_1K$, $M_1A_2K$, $M_1A_3K$, $M_2A_1K$, $M_2A_2K$ i $M_2A_3K$ (imamo 6 mogućnosti (množimo 2 mogućnosti za slovo M i 3 za slovo A) da zapravo dobijemo riječ MAK). Uz pretpostavku da su sva (razlikovna) slova jednako vjerojatna, $\mathbb{P}(A) = \frac{2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{120}$.

**Zadatak 1.5** *Ana, Marko i Ivan idu u kino, Kolika je vjerojatnost da će Ana i Marko sjediti zajedno?*

**Rješenje:** [PERMUTACIJE] $\Omega = \{$svi rasporedi 3 osobe na 3 sjedala$\}$, $|\Omega| = 3! = 6$. $A = \{$Ana i Marko sjede zajedno$\}$. S obzirom da su nam ovdje povoljni oni događaji u kojima Ana i Marko sjede jedan do drugoga, zamislit ćemo da smo ih stavili u jednu "kućicu", te tu "kućicu" možemo permutirati s preostalim prijateljem, Ivanom, na 2! načina. Dodatno, Anu i Marka u "kućici" možemo rasporediti na 2! načina, te je stoga $|A| = 2! \cdot 2! = 4$ i $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

**Zadatak 1.6** *Ana i Marko idu u kino s još 10 prijatelja. Kolika je vjerojatnost da sjede zajedno?*

**Rješenje:** [PERMUTACIJE] Zadatak je sličan prethodonom. Ponovo označimo s $\Omega = \{\text{svi mogući rasporedi 12 osoba na 12 sjedala}\}$, $|\Omega| = 12!$.
Opet ćemo Anu i Marka, kako ih ne bismo razdvajali, staviti u jednu "kućicu", koju ćemo s ostalih 10 prijatelja permutirati na 11! načina. Ponovo, Anu i Marka unutar "kućice" možemo poredati na 2! načina. Stoga je broj povoljnih rasporeda za događaj $A = \{\text{Ana i Marko sjede zajedno}\}$, $|A| = 11! \cdot 2!$, te je $\mathbb{P}(A) = \frac{11! \cdot 2!}{12!} = \frac{1}{6}$.

**Zadatak 1.7** *Bacamo dvije simetrične kocke. Izračunajte vjerojatnost sljedećih dodgađaja:*

*a)* $A = \{\text{suma brojeva na kockicama je 7 ili 11}\}$,

*b)* $B = \{\text{brojevi na kockicama su relativno prosti}\}$,

*c)* $C = \{\text{produkt brojeva na kockicama je neparan}\}$,

*d)* $D = \{\text{jedan broj na kocki dijeli drugi}\}$.

**Rješenje:** Kao prostor elementarnih događaja možemo uzeti skup svih uređenih parova broja koji je pao na prvoj kockici i broja koji je pao na drugoj kockici $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$, $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$. Zbog pretpostavke o simetričnosti novčića, svi su elementarni događaji jednako vjerojatni.

a) $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),(5,6),(6,5)\}$. Prvih 6 uređenih parova se odnosi na slučaj kad je zbroj brojeva na kockicama jednak 7, a posljednja dva para jedine su dvije mogućnosti da suma brojeva na kockicama bude 11. Oba slučaja povoljna su za zadani događaj $A$, te stoga u obzir uzimamo njihovu uniju. Slijedi $|A| = 8$, $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

b) Dva su broja relativno prosta kad im je najveći zajednički djelitelj jednak jedan. Uočimo da je svaki prirodni broj relativno prost s jedan. Slijedi $B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),$ $(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),$ $(6,1),(6,5)\}$, $|B| = 23$, $\mathbb{P}(B) = \frac{23}{36}$.

c) Uočimo: produkt brojeva na kockicama je neparan ako i samo ako je svaki od brojeva koji su pali na kockicama neparan. Dakle, $C = \{(1,1),(1,3(,(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$, $|C| = 9$, $\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

d) U ovom primjeru, za fiksiran broj na prvoj kockici, na drugoj mora pasti njegov djelitelj ili višekratnik. Zato je $D = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$ $(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,6),(4,1),(4,2),$ $(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6)\}$, $|D| = 22$, $\mathbb{P}(D) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

**Zadatak 1.8** *Promatramo peptid od 8 aminokiselina. Ako je svaka aminokiselina odabrana na slučajan način (od njih 20), kolika je vjerojatnost da taj peptid sadrži neku zadanu aminokiselinu 'x'?*

**Rješenje:** U ovom zadatku bitan nam je poredak kojim su aminokiseline vezane u peptid. Također, za skup $\Omega$ svih elementarnih događaja na svako od 8 mjesta možemo odabrati bilo koju od ukupno 20 aminokiselina. Stoga je $|\Omega| = 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^8$. Označimo s $A = \{\text{peptid sadrži 'x'}\}$. Ovaj je zadatak lakše riješiti promatrajući komplementarni događaj, tj. da peptid ne sadrži aminokiselinu 'x'. U tom slučaju na svako od 8 mjesta možemo odabrati bilo koju aminokiselinu, osim aminokiseline 'x' (imamo 19 mogućnosti za svako mjesto), pa je $|A^c| = 19^8$. Slijedi $\mathbb{P}(A^c) = \frac{19^8}{20^8}$ te

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{19^8}{20^8} \approx 0.3366.$

**Zadatak 1.9** *Kolika je vjerojatnost da peptid iz prošlog zadatka sadrži aminokiseline 'x' i 'y'. Uputa: koristiti jednakost* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}((A^c \cap B^c)^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

**Rješenje:** Kao i u prethodnom zadatku $|\Omega| = 20^8$. Označimo ovdje događaje $A = \{\text{peptid sadrži 'x'}\}$, $B = \{\text{peptid sadrži 'y'}\}$. U zadatku se traži $\mathbb{P}(A \cap B)$. Vrijedi relacija (navedena pod svojstvima vjerojatnosti) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Jednako kao u prethodnom zadatku dobivamo $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{19^8}{20^8}$. Koristimo jednakost navedenu u uputi jer nam je ponovno lakše zadatak rješavati preko komplementarnih događaja. $A^c \cap B^c = \{\text{peptid ne sadrži ni 'x' ni 'y'}\}$ (imamo 18 preostalih aminokiselina za svako od 8 mjesta), $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \frac{18^8}{20^8}$. Slijedi $\mathbb{P}(A \cup B) =$[uputa]$= 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{18^8}{20^8}$ te $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 2 \cdot (1 - \frac{19^8}{20^8}) - (1 - \frac{18^8}{20^8}) \approx 0.1036$.

**Zadatak 1.10** *Peptid se sastoji od 8 aminokiselina, i to od 4 jedne vrste, 2 druge vrste i 2 treće vrste.*

a) *Koliko postoji načina da se odaberu 3 vrste koje čine taj peptid (uz specifikaciju da trebamo 4 aminokiseline prve vrste, 2 aminokiseline druge i 2 aminokiseline treće vrste)?*

b) *Na koliko načina se određene tri vrste mogu rasporediti unutar peptida?*

**Rješenje:** Ponovo imamo ukupno 20 mogućih aminokiselina.

a) Kad međusobno ne bismo razlikovali te 3 vrste aminokiselina, ukupan broj načina da od 20 aminkiselina odaberemo neke 3 (s tim da nam nije bitan poredak izvlačenja, nego samo koje aminokiseline odabremo, tj. imamo [KOMBINACIJE]) bio bi $\binom{20}{3}$. No, uočimo da ovdje te 3 vrste razlikuju po broju aminokiselina koje iz njih biramo. Zapravo zato prvo od 20 njih biramo jednu vrstu (iz koje ćemo uzeti 4 aminokiseline), te potom od preostalih 19 vrsta dvije vrste (od svake od njih uzimamo po 2 aminkiseline). Zato je ukupan broj načina za odabir te 3 vrste (uz razlikovanje po broju aminokiselina koje uzimamo iz njih) $\binom{20}{1} \cdot \binom{19}{2} = 20 \cdot \frac{19 \cdot 18}{2!}$. Uočimo da bismo jednak rezultat dobili da smo prvo odabrali dvije vrste (za po dvije aminokiseline) od 20 mogućih, te od preostalih 18 vrsta još jednu (za 4 aminokiseline): $\binom{20}{2} \cdot \binom{18}{1} = \frac{20 \cdot 19}{2!} \cdot 18$. (Također smo mogli i prvo od 20 vrsta odabrati 3 vrste aminokiselina (bez razlikovanja), ali onda od odabrane 3 vrste odabrati jednu (onu za 4 aminokiseline) - ovim posljednjim odabirom automatski podrazumijevamo da se preostale 2 od 3 odabrane vrste odnose na one iz kojih uzimamo po 2 aminokiseline: $\binom{20}{3} \cdot \binom{3}{1}$.)

b) U ovom podzadatku, označimo li mjesta redom brojevima 1-8, zapravo biramo 4 mjesta za aminokiselinu prve vrste, 2 za aminokiselinu druge i preostala 2 za aminokiselinu treće vrste. (Provjerite da je ponovo svejedno za koju vrstu prvo biramo mjesta, za koju iduće, a za koju vrstu mjesta biramo posljednje.) Također (ako pretpostavimo da prvo biramo mjesta za vrstu za 4 aminokiseline), nije nam bitan poredak kojim izvlačimo 4 mjesta iz 1-8, već samo da odabremo neka 4 ([KOMBINACIJE]: biramo četveročlani podskup osmeročlanog skupa - to možemo učiniti na $\binom{8}{4}$ načina). Preostalo nam je 4 mjesta, od toga trebamo odabrati neka dva (svejedno u kom poretku) za drugu vrstu - to radimo na $\binom{4}{2}$ načina. Posljednja dva mjesta pripadaju trećoj vrsti aminokiselina: dvočlani podskup od preostale dvije pozicije možemo odabrati samo na $1 = \binom{2}{2}$ način. Kako želimo da nam svi ti zahtjevi vrijede istovremeno, množimo mogućnosti odabira za pojedinu vrstu: ukupan broj načina u ovom podzadatku je $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot 22$.

**Zadatak 1.11** *Ana sadi tulipane u redu jedan kraj drugoga. Ima 2 bijela, 3 crvena i 4 u preostalim bojama (žutoj, rozoj, ljubičastoj i plavoj). No, sve su joj se lukovice pomiješale, pa sadi u slučajnom poretku.*

*a) Kolika je vjerojatnost da prvi u redu bude bijeli?*

*b) Kolika je vjerojatnost da prvi u redu bude bijeli, a drugi crveni?*

**Rješenje:** Ovaj zadatak riješit ćemo na dva načina: prvi je koristeći premutacije s ponavljanjem (ovakav zadatak tipičan je primjer upotrebe permutacija s ponavljanjem), a drugi je koristeći obične permutacije (za što, slično kao u zadatku 1.4, moramo uvesti razlikovne oznake - jer obične permutacije pretpostavljaju da su nam svi elementi različiti).

*1. način:* [PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM] Imamo ukupno 9 cvjetova - od toga imamo 2 bijela, 3 crvena, i po jedan žuti, rozi, ljubičasti i plavi. Kad bismo razlikovali sve cvjetove (u smislu da ih je svih 9 različitih), mogli bismo ih permutirati na 9! načina. No, zapravo ne razlikujemo prvi stavljeni bijeli od drugog (kad bi bili različiti, na odabrana dva mjesta mogli bismo ih rasporediti na 2! načina), te prvi, drugi i treći stavljeni crveni tulipan (kad bi bili različiti, na odabrana 3 mjesta permutirali bismo ih na 3! načina). Zato 9! načina moramo podijeliti s brojem onih načina koji nam efektivno daju isti izgled gredice: 2!·3!. Zato je ovdje $|\Omega_{\text{perm. s pon.}}| = \frac{9!}{2!\cdot 3!}$. (U permutacijama s ponavljanjem brojimo samo u stvarnosti različite izglede gredice.)

a) Jednom kad posadimo prvi bijeli cvijet, preostat će nam još jedan bijeli, 3 crvena i po jedan žuti, rozi, ljubičasti i plavi. Zadatak se zapravo svodi na permutacije s ponavljanjem od 8 elemenata, od kojih su 3 ista (crvena), a od preostalih 5 boja imamo po jedan primjerak. Slično kao u uvodnom dijelu, kad bismo sve lukovice razlikovali, mogli bismo ih poredati na 8! načina, no zapravo ne razlikujemo prvi, drugi i treći stavljeni crveni (koje bismo, kad bi bili različiti, permutirali na 3! načina). Zato je broj povoljnih rasporeda za događaj $A = \{\text{prvi cvijet je bijeli}\}$ $\frac{8!}{3!}$, te je $\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{8!}{3!}}{\frac{9!}{2!\cdot 3!}} = \frac{2}{9}$.

b) Kao i u prethodnom podzadatku, ovdje prvo posadimo bijeli, pa crveni cvijet, te nam je preostao 1 bijeli, 2 crvena, te po 1 žuti, rozi, ljubičasti i plavi. Trebamo zapravo odrediti permutacije s ponavljanjem 7 preostalih cvjetova od kojih su 2 crvena: to možemo napraviti na $\frac{7!}{2!}$ načina, što je broj povoljnih rasporeda za događaj $B = \{\text{prvi cvijet je bijeli, a drugi crveni}\}$, te je $\mathbb{P}(B) = \frac{\frac{7!}{2!}}{\frac{9!}{2!\cdot 3!}} = \frac{1}{12}$.

*2. način:* [PERMUTACIJE] Za ovaj način, dakle, moramo uvesti razlikovne oznake $B_1$ i $B_2$ te $C_1$, $C_2$ i $C_3$. Dakle, razlikujemo sve cvjetove, pa je $|\Omega_{\text{perm.}}| = 9!$.

a) Ponovo označimo s $A = \{\text{prvi cvijet je bijeli}\}$. Kako ovdje razlikjuemo sve cvjetove, za odabir prvog bijelog cvijeta imamo 2 načina ($B_1$ ili $B_2$). Nakon toga, ostalo nam je još 8 različitih cvjetova za permutirati: to radimo na 8! načina, pa je $|A| = 2 \cdot 8!$ i $\mathbb{P}(A) = \frac{2 \cdot 8!}{9!} = \frac{2}{9}$.

b) Ovdje za događaj $B = \{\text{prvi cvijet je bijeli, a drugi crveni}\}$ prvi bijeli cvijet možemo odabrati na 2 načina, a crveni cvijet koji sadimo nakon njega na 3 načina ($C_1$, $C_2$ ili $C_3$), te preostalih 7 cvjetova (za koje smo pretpostavili da su različiti) raspoređujemo na 7! načina, tj. $|B| = 2 \cdot 3 \cdot 7!$, te $\mathbb{P}(B) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7!}{9!} = \frac{1}{12}$.

Dva su događaja $A$ i $B$ **nezavisna** ako realizacija jednog od njih ne nosi informaciju o vjerojatnosti realizacije drugog događaja. Formalno, događaju $A$ i $B$ su nezavisni ako vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

**Zadatak 1.12** *Zadano je $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Jesu li $A$ i $B$ nezavisni događaji ako je*

*a)* $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$*?*

*b)* $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$*?*

**Rješenje:** Trebamo dakle u svkom od podzadataka provjeriti vrijedi li relacija $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. S obzirom da nam je zadana vjerojatnost $\mathbb{P}(A \cup B)$, sjetimo se da vjerojatnost $\mathbb{P}(A \cap B)$ možemo dobiti iz formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. S druge strane, $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$. Kako izračunate dvije vjerojatnosti nisu jednake, događaji $A$ i $B$ u ovom slučaju nisu nezavisni.

b) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, što je jednako $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, stoga su u ovom primjeru događaji $A$ i $B$ nezavisni.

**Zadatak 1.13** *U SAD-u otprilike 17% odraslih osoba puši i otprilike 22% ima visok krvni tlak. Istraživanja pokazuju da visok krvni tlak nije povezan s pušenjem, tj. nezavisni su.*

a) *Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba iz SAD-a puši i ima visok krvni tlak?*

b) *Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba iz SAD-a ima bar jedno od ta dva obilježja?*

**Rješenje:** Označimo s $A = \{$sluč. odabrana osoba puši$\}$, $B = \{$sluč. odabrana osoba ima visok krvni tlak$\}$. U zadatku je zadano $\mathbb{P}(A) = 0.17$, $\mathbb{P}(B) = 0.22$.

a) Traži se $\mathbb{P}(A \cap B)$. Iz pretpostavke o nezavisnosti događaja $A$ i $B$ slijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0.17 \cdot 0.22 \approx 0.037$.

b) Traži se $\mathbb{P}(A \cup B)$. Nju možemo ponovo računati prema formuli $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \approx 0.17 + 0.22 - 0.037 \approx 0.353$.

## 1.2 Uvjetna vjerojatnost

- Ako znamo da se dogodio događaj $B$, vjerojatnost da se dogodi događaj $A$ (uz uvjet $B$) definira se s

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \tag{1}$$

pri čemu mora vrijediti $\mathbb{P}(B) > 0$.

**DZ 1.2** *Što je $\mathbb{P}(A|B)$ ako su $A$ i $B$ nezavisni događaji?*

**Rješenje:** $\mathbb{P}(A|B)$ =[(1)]= $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}B}$=[nezavisnost]= $\frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$. Drugim riječima, ako su $A$ i $B$ nezavisni događaji, to da se dogodio događaj $B$ ne utječe na vjerojatnost da se dogodi događaj $A$.

**Primjer 1.5** *Bacamo simetričnu igraću kocku. Ako znamo da je pao neparan broj, kolika je vjerojatnost da je pao broj 3?*

**Rješenje:** Označimo događaje $A = \{\text{pao je broj 3}\}$, $B = \{\text{pao je broj neparan broj}\}$. Uz pretpostavku o simetričnosti kockice, slijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ pa je $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

**Napomena 1.4** *Pri računanju uvjetne vjerojatnosti događaja $C$ uz događaj $D$ (znamo da se događaj $D$ dogodio, pa onda uz tu informaciju računamo vjerojatnost događaja $C$), možemo se ponašati kao da je događaj $D$ "sve što vidimo" - iz događaja $D$ vidimo samo presjeke drugih događaja sa samim $D$ (otud izraz u brojniku), no za to ipak moramo "platiti" dijeljenjem s vjerojatnošću događaja $D$, tj. događaja iz uvjeta (za koji nam je poznato da se dogodio).*

**Zadatak 1.14** *Vjerojatnost da strijelac pogodi metu ako je vrijeme vjetrovito iznosi 0.4, a kada nije vjetrovito 0.7. Vjerojatnost da će puhati vjetar jednaka je 0.3. Izračunajte vjerojatnost da*

*a) dođe do pojave vjetra, a strijelac ipak pogodi metu,*

*b) strijelac pogodi metu.*

**Rješenje:** Označimo događaje $V = \{\text{puše vjetar}\}$ i $S = \{\text{strijelac je pogodio metu}\}$. Prva zadana vjerojatnost odnosi se na $\mathbb{P}(S|V) = 0.4$ (uz poznatu informaciju da puše vjetar, vjerojatnost da strijelac pogodi iznosi 0.4). Ako smo s $V$ označili događaj da vjetar puše, tada nam $V^c$ označava izostanak vjetra, te je druga zadana vjerojatnost $\mathbb{P}(S|V^c) = 0.7$. Još imamo $\mathbb{P}(V) = 0.3$.

a) Traži se $\mathbb{P}(V \cap S)$. To možemo dobiti iz definicije uvjetne vjerojatnosti (formula (1)): $\mathbb{P}(S|V) = \frac{\mathbb{P}(S\cap V)}{\mathbb{P}(V)} \implies \mathbb{P}(S \cap V) = \mathbb{P}(S|V) \cdot \mathbb{P}(V) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$.

b) Traži se $\mathbb{P}(S)$. Sam događaj $S$ možemo rastaviti na disjunktne događaje $S = S \cap (V \cup V^c) = (S \cap V) \cup (S \cap V^c)$ (disjunktni su jer je $S \cap V$ podskup od $V$, a $S \cap V^c$ od $V^c$). Zbog te disjuntnosti slijedi $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap V) + \mathbb{P}(S \cap V^c)$. $\mathbb{P}(S \cap V^c) =$[formula (1)]$= \mathbb{P}(S|V^c) \cdot \mathbb{P}(V^c) = \mathbb{P}(S|V^c) \cdot (1 - \mathbb{P}(V)) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$, pa je $\mathbb{P}(S) = 0.12 + 0.49 = 0.61$.

- **(Potpun sustav događaja=PSD)** Događaji $H_1, H_2, H_3, \ldots$ (najviše njih prebrojivo mnogo) čine **potpun sustav događaja** ako $H_i \neq \emptyset$ za svaki $i$ (neprazni događaji), $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ (u parovima disjunktni) te $\bigcup_i H_i = \Omega$ (u uniji daju cijeli prostor događaja).

**Napomena 1.5** *1) Za događaje s gornja 3 svojstva kažemo da čine (prebrojivu) particiju skupa $\Omega$.*

*2) Događaje $(H_i)_i$ često nazivamo hipotezama.*

- **(Formula potpune vjerojatnosti=FPV)** Za $(H_i)_i$ potpun sustav događaja i neki događaj $A$ vrijedi formula

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$$

**Napomena 1.6** *Kratki dokaz za FPV:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \Omega) \\
&= [(H_i)_i \text{ čine PSD}] = \mathbb{P}(A \cap (\cup_i H_i)) = \mathbb{P}(\cup_i (A \cap H_i)) \\
&= [\text{disjunktni}] = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) \\
&= [\text{formula (1)}] = \sum_i \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i).
\end{aligned}$$

**Zadatak 1.15** *Bacamo 5 simetričnih novčića. Nakon prvog bacanja ponovo bacamo one novčiće koji su u prvom bacanju pokazali glavu. Kolika je vjerojatnost da će nakon drugog bacanja ukupno (u oba bacanja) pasti barem 3 pisma?*

**Rješenje:** Označimo s $A = \{$u oba bacanja ukupno pala su barem 3 pisma$\}$. Da bismo lakše odredili vjerojatnost događaja $A$ koji se odnosi i na drugo bacanje, uvjetovat ćemo po ishodu prvog bacanja svih 5 novčića.
Označimo s $H_i = \{$u prvom bacanju je palo $i$ glava$\}$, $0 \leq i \leq 5$. Uočimo da $(H_i)_{i=0}^5$ čine PSD (u parovima su disjunktni, jer u prvom bacanju može pasti točno 0, točno 1, ..., ili točno 5 glava, te su to sve mogućnosti za broj glava

u prvom bacanju).
Da bismo odredili vjerojatnosti događaja $H_i$, primijetimo da je ukupan broj elementarnih događaja (za prvo bacanje) jednak $2^5$ s obzirom da na svakom od 5 novčića može pasti ili pismo ili glava, kao i da su nam za $H_i$ povoljni oni elementarni događaji u kojima na $i$ mjesta imamo glave (ako mjesta, tj. novčiće označimo brojevima 1,...,5, zapravo biramo $i$-člani podskup tog peteročlanog skupa koji će nam označavati pozicije na kojima su pale glave - uočimo da nije bitan poredak kojim "izvlačimo" mjesta na kojima su pale glave, već samo koje su to pozicije, pa koristimo binomne koeficijente $\binom{5}{i}$ za računanje broja povoljnih elementarnih događaja). Dakle $\mathbb{P}(H_i) = \frac{\binom{5}{i}}{2^5}$.
Nadalje, $\mathbb{P}(A|H_0) = \{$u prvom bacanju je palo 0G, 5P, pa je događaj da je u oba bacanja palo ukupno bar 3P uz ovakav ishod prvog bacanja zapravo siguran događaj$\} = 1$. Istim razmišljanjem se dobije $\mathbb{P}(A|H_1) = \{$u prvom bacanju je palo 1G, 4P$\} = 1$ te $\mathbb{P}(A|H_2) = \{$u prvom bacanju je palo 2G, 3P$\} = 1$. $\mathbb{P}(A|H_3) = \{$u 1. bac. palo 3G, 2P, pa nam u 2. bac. treba još **barem** 1P - zato u brojniku sumiramo disjunktne ishode da je u 2. bacanju, kad bacamo 3 novčića na kojima su u 1. bacanju pale G, na točno jedno mjesto, na točno 2 mjesta (u nebitnom poretku) ili na točno 3 mjesta palo P$\}$ $= \frac{\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{7}{8}$ (jer uz poznati $H_3$ u 2. bacanju bacamo 3 novčića, ukupan broj mogućih ishoda je $2^3$ (P ili G na svako od 3 mjesta). Slično se dobije $\mathbb{P}(A|H_4) = \{$u 1. bac. palo 4G, 1P, u 2. nam treba još bar 2P, a bacamo 4 novčića$\} = \frac{\binom{4}{4}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{2^4} = \frac{11}{16}$ te $\mathbb{P}(A|H_4) = \{$u 1. bac. palo 5G, 0P, u 2. nam treba još bar 3P, a bacamo 5 novčića$\} = \frac{\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}}{2^5} = \frac{1}{2}$.
$\mathbb{P}(A) =$[FPV]$= \sum_{i=0}^{5} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i) = 1 \cdot \frac{\binom{5}{0}}{2^5} + 1 \cdot \frac{\binom{5}{1}}{2^5} + 1 \cdot \frac{\binom{5}{2}}{2^5} + \frac{7}{8} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{2^5}$
$+ \frac{11}{16} \cdot \frac{\binom{5}{4}}{2^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{5}{5}}{2^5} = \frac{459}{512}$.

**Zadatak 1.16** *U posudi je pomiješano 5 crnih i 7 bijelih kuglica. Izvlačimo kuglice na slučajan način bez vraćanja u posudu. Odredimo vjerojatnost da je druga izvučena kuglica crna.*

**Rješenje:** Ponovno ćemo uvjetovati na ishod prvog izvlačenja. Događaji $H_1 = \{$prva izvučena je crna$\}$ i $H_2 = \{$prva izvučena je bijela$\}$ čine PSD. Vrijedi $\mathbb{P}(H_1) = \frac{5}{12}$ i $\mathbb{P}(H_2))\frac{7}{12}$. Stavimo $A = \{$druga je crna$\}$. Imamo: $\mathbb{P}(A|H_1) = \{$nakon izvlačenja 1 crne kuglice, ostalo 4 crne i 7 bijelih$\} = \frac{4}{11}$

te $\mathbb{P}(A|H_2) = \{$nakon izvlačenja 1 bijele kugl., ostalo 5 crnih i 6 bijelih$\} = \frac{5}{11}$. U zadatku se traži $\mathbb{P}(A)$. Iskoristit ćemo FPV: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\cdot\mathbb{P}(H_2) = \frac{4}{11}\cdot\frac{5}{12} + \frac{5}{11}\cdot\frac{7}{12} = \frac{55}{132}$.

**DZ 1.3** *(sličan zadatak prethodnom) Iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bira se broj, a potom od preostaih brojeva još jedan broj. Kolika je vjerojatnmost da drugi broj bude neparan? (Rješenje: $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$).*

- **(Bayesova formula)** Za PSD $(H_i)_i$ i događaj $A$ vrijedi formula za računanje tzv. aposteriorne vjerojatnosti hipoteze $H_i$ nakon što se dogodio događaj $A$:

  $$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\cdot\mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)},$$

  za svaki $i$.

**Zadatak 1.17** *"Poznato je" da se ženske pudlice rađaju 10% češće nego muške. Promatrana je bolest 'x' kod pudlice. Vjerojatnost bolesti 'x' kod ženskih pudlica je 0.2, a kod muških 0.1. Ako je poznato da je pudlica oboljela, kolika je vjerojatnost da je u pitanju ženska pudlica?*

**Rješenje:** Događaji $H_1 = \{$Ž pudlica$\}$ i $H_2 = \{$M pudlica$\}$ čine PSD. Stavimo $A = \{$bolest$\}$. Traži se aposteriorna vjerojatnost $\mathbb{P}(H_1|A)$ (u uvjet stavljamo uvijek onaj događaj koji znamo da se dogodio). Za to ćemo iskoristiti Bayesovu formulu, koja u nazivniku ima $\mathbb{P}(A)$, koju ćemo izračunati preko FPV. Najprije odredimo vjerojatnosti hipoteza $H_1$ i $H_2$: iz zadane relacije $\mathbb{P}(H_1) = 0.1 + \mathbb{P}(H_2)$ te $\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2) =$[disjunktni su i u uniji daju prostor svih elem. dog. $\Omega$]$= \mathbb{P}(\Omega) = 1$ slijedi $\mathbb{P}(H_1) = 0.55$, $\mathbb{P}(H_2) = 0.45$. Također, ako znamo da se radi o ženskoj pudlici, vjerojatnost da se dogodi $A$ jednaka je 0.2, tj. $\mathbb{P}(A|H_1) = 0.2$ i slično $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.1$. Slijedi

$\mathbb{P}(H_1|A) = [\text{Bayes}] = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\cdot\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = [\text{FPV}] = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\cdot\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\cdot\mathbb{P}(H_1)+\mathbb{P}(A|H_2)\cdot\mathbb{P}(H_2)}$
$= \frac{0.2\cdot 0.55}{0.2\cdot 0.55+0.1\cdot 0.45} = 0.7.$

**Zadatak 1.18** *Pri sadnji se koriste 3 vrste sjemena u zrnu. U vreći su pomiješane sve tri vrste i to 200 zrna 1. vrste, 400 zrna 2. vrste i 500 zrna 3. vrste. Pojedina zrnca su žute boje. Poznato je da je 50% sjemena 1. vrste, 20% sjemena 2. vrste i 10% sjemena 3. vrste upravo te žute boje. Slučajnim odabirom izvlačimo jedno zrno iz vreće.*

*a) Kolika je vjerojatnost da je izvučeno žuto sjeme?*

*b) Kolika je vjerojatnost da, ako znamo da je izvučeno žuto sjeme, izvučeno zrno iz 1. vrste sjemena?*

**Rješenje:** Stavimo $H_1 = \{1.\text{ vrsta}\}$, $H_2 = \{2.\text{ vrsta}\}$ i $H_3 = \{3.\text{ vrsta}\}$. Navedeni događaji čine PSD. $A = \{\text{žuto sjeme}\}$.
Vrijedi $\mathbb{P}(H_1) = \frac{200}{200+400+500} = \frac{200}{1100}$, $\mathbb{P}(H_2) = \frac{400}{1100}$, $\mathbb{P}(H_3) = \frac{500}{1100}$ te je zadano $\mathbb{P}(A|H_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.2$ i $\mathbb{P}(A|H_3) = 0.1$.

a) Traži se $\mathbb{P}(A)$. Za to nam je dovoljna FPV: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i) = 0.5 \cdot \frac{200}{1100} + 0.2 \cdot \frac{400}{1100} + 0.1 \cdot \frac{500}{1100} = \frac{23}{110}$.

b) Traži se $\mathbb{P}(H_1|A)$. Za to nam je potrebna Bayesova formula: $\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\cdot\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.5\cdot\frac{200}{1100}}{\frac{23}{110}} = \frac{10}{23}$.

**DZ 1.4** *(zadatak sličan prethodnom) Trgovina nabavlja mobitele od proizvođača X i Y. Proizvođač X doprema 1000 komada od čega 5% ima grešku, a Y doprema 700 komada od čega 2% ima grešku. Kolika je vjerojatnost da slučajno odbrani mobitel ima grešku? Koja je vjerojatnost da odabrani mobitel s greškom dolazi od proizvođača X? (Rješenje: $\mathbb{P}(A) = \frac{64}{1700}$, $\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{25}{32}$.)*

## 2 Slučajne varijable

### 2.1 Diskretne slučajne varijable

- distribucije diskretnih slučajnih varijabli

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ \mathbb{P}(X = a_1) & \mathbb{P}(X = a_2) & \mathbb{P}(X = a_3) & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix},$$

pri čemu mora vrijediti $\sum_i p_i = 1$ (jer u tablici navodimo **sve** vrijednosti koje $X$ može poprimiti s pozitivnom vjerojatnošću (u gornji redak) a u donji redak stavljamo vjerojatnost s kojom $X$ poprima pripadnu vrijednost $a_i$. Gornja tablica naziva se tablica distribucije (razdiobe) diskretne slučajne varijable $X$.

**Primjer 2.1** *$X =$broj koji je pao na simetričnoj igraćoj kockici*
*Slijedi (zbog prepostavke o simetričnosti svi su brojevi jednako vjerojatni)*

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

*$Y =$ broj pisama nakon bacanja jednog simetričnog novčića*

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**DZ 2.1** *Odredite tablicu distribucije za broj pisama palih u 2 nezavisna bacanja simetričnog novčića.*

**Rješenje:** U 2 bacanja na novčići može pasti ukupno 0P, 1P ili 2P. Za slučaj 0P imamo jedinu mogućnost da su u oba bacanja pale G: GG. Vjerojatnost tog događaja (koji je zapravo presjek događaja da je u 1. bacanju palo G i u 2. bacanju je palo G), zbog pretpostavke o nezavisnoti

($\mathbb{P}(A \cap B)$ =[nezavisnost]= $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$) i simetričnosti novčića jednaka je $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(GG) = \mathbb{P}(G) \cdot \mathbb{P}(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Za drugi slučaj, 1P, imamo 2 mogućnosti: PG ili GP (i to su disjunktni događaji), pa je $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(PG) + \mathbb{P}(GP)$ =[slično objašnjenje kao za prethodni račun, uz pretpostavke o nezavisnoti bacanja i simetričnosti]= $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Na isti način dobivamo i $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(PP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Tablično zapisano,

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- **(Matematičko očekivanje)** diskretne slučajne varijable $X$ definira se formulom

  $$\mathbb{E}(X) = \sum_i a_i \cdot \mathbb{P}(X = a_i) = \sum_i a_i \cdot p_i.$$

  Očekivanje **transformacije** (koju dobijemo primjenjujući funkciju $f$ na varijablu $X$):

  $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_i f(a_i) \cdot p_i,$$

  drugim riječima, transformiramo samo ishode, dok vjerojatnosti $p_i$ ostaju iste.

- **Varijanca** od X :

  $$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2).$$

- **Standardna devijacija** od X :

  $$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}.$$

**Napomena 2.1** *Očekivanje povezujemo sa srednjom vrijednosti, a varijancu s odstupanjem od srednje vrijednosti.*

**Zadatak 2.1** *Odredite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju od $X$:*

$$X \sim \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

**Rješenje:** $\mathbb{E}(X) = (-5) \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{3}{4} = 10$
Za varijancu nam treba $\mathbb{E}(X^2)$, što je zapravo očekivanje transformacije od $X$ uz funkciju $f(x) = x^2$: $\mathbb{E}(X^2) = (-5)^2 \cdot \frac{1}{4} + 15^2 \cdot \frac{3}{4} = 175$.
$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 175 - 10^2 = 75$.
$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)} = \sqrt{75}$.

**Zadatak 2.2** *Za zadani*

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & a & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

*odredite*

*a)* $a \in \mathbb{R}$, $a =$*?*

*b)* $\mathbb{P}(X \geq 1) =$*?*, $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) =$*?*

*c)* $\mathbb{E}(X) =$*?*, $\mathbb{E}(2X + 1) =$*?*, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) =$*?*

**Rješenje:**

a) Kako suma svih vjerojatnosti u donjem retku tablice distribucije mora biti jednaka 1, slijedi $a = 0.3$.

b) $\mathbb{P}(X \geq 1) =$[gledajući vrijednosti koje $X$ poprima]$= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.6$, $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) =$[lakše je gledati komplementarni događaj]$= 1 - \mathbb{P}(X < -1 \text{ ili } X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 2) = 0.6$.

c) $\mathbb{E}(X) = (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 = 0.9$
$\mathbb{E}(2X+1) = (2\cdot(-1)+1)\cdot 0.1+(2\cdot 0+1)\cdot 0.3+(2\cdot 1+1)\cdot 0.2+(2\cdot 2+1)\cdot 0.4 = 2.8$
$\mathbb{E}(X^2) = (-1)^2 \cdot 0.1 + 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.4 = 1.9$
$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1.9 - 0.9^2 = 1.09$.

- **(Zajednička distribucija) dvije diskretne varijable $X$i $Y$**

| $X\|Y$ | $b_1$ | $b_2$ | $\dots$ | $b_n$ | $\mathbb{P}(X=\cdot)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$ | $p_{1n}$ | $\mathbb{P}(X=a_1)$ |
| $a_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$ | $p_{2n}$ | $\mathbb{P}(X=a_2)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_m$ | $p_{m1}$ | $p_{m2}$ | $\dots$ | $p_{mn}$ | $\mathbb{P}(X=a_m)$ |
| $\mathbb{P}(Y=\cdot)$ | $\mathbb{P}(Y=b_1)$ | $\mathbb{P}(Y=b_2)$ | $\dots$ | $\mathbb{P}(Y=b_n)$ | 1 |

U gornjoj tablici vrijednosti u 1. stupcu $a_1, ..., a_m$ su vrijednosti koje poprima prva navedena varijabla u tablici ($X$), a vrijednosti u prvom retku $b_1, ..., b_n$ su vrijednosti koje poprima druga navedena varijabla ($Y$). S $p_{ij}$ je označena vjerojatnost presjeka $p_{ij} = \mathbb{P}(X = a_i \cap Y = b_j)$ koju kraće pišemo kao $\mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j)$. Posljednji stupac tablice daje tzv. **marginalnu distribuciju** diskretne slučajne varijable $X$, a posljednji redak daje marginalnu distribuciju diskretne sl. varijable $Y$. To dobijemo tako što, npr. za $\mathbb{P}(X = a_1)$ sumiramo sve vjerojatnosti $p_{1j}$ iz drugog retka u tablici - sve te vjerojatnosti zapravo su vjerojatnosti presjeka događaja da je $\{X = a_1\}$ i događaja da $Y$ poprimi neku vrijednost $b_j$. (Događaji $\{Y = b_j\}_{j=1}^n$ su disjunktni jer $Y$ ne može istovremeno poprimiti dvije različite vrijednosti, a prolazeći po svim vrijednostima za $Y$, zapravo dobivamo PSD.) Dakle, kad sumiramo sve vjerojatnosti iz tog 2. retka tablice, dobit ćemo $\mathbb{P}(X = a_1)$. Slično, kad sumiramo sve vjerojatnosti $p_{i1}$ drugog stupca u tablici, dobit ćemo $\mathbb{P}(Y = b_1)$.

- Uz podatke iz gornje tablice, $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ ćemo dobit tako da množimo sve kombinacije ishoda $a_i$ za $X$ i $b_j$ za $Y$ te taj umnožak pomnožimo s pripadnom zajedničkom vjerojatnošću $p_{ij}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \cdot Y) &= \sum_i \sum_j a_i \cdot b_j \cdot p_{ij} \\ &= a_1 b_1 p_{11} + a_1 b_2 p_{12} + ... + a_1 b_n p1n \\ &+ a_2 b_1 p_{21} + a_2 b_2 p_{22} + ... + a_2 b_n p_{2n} \\ &+ ...+ \\ &+ a_m b_1 p_{m1} + a_m b_2 p_{m2} + ... + a_m b_n p_{mn}\end{aligned}$$

- **Kovarijanca** slučajnih varijabli $X$ i $Y$ definira se formulom:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

**Zadatak 2.3** *(...)*

**Vježbe 6.11. 2024. - zadaci**

- **Svojstva očekivanja i varijance (...)**

**Zadatak 2.4** *Očekivani prinos kukuruza po hektaru je 8 tona/ha, a pšenice je 6 tona/ha. Cijena kukuruza je 200€/tona, a pšenice 230€/tona. Koliku očekivanu zaradu ima Jurica koji će posaditi 10 hektara kukuruza i 18 hektara pšenice?*
*Ako je prinos pšenice ($X$) i kukuruza ($Y$) nezavisan, te* $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = 0.25$*, kolika je varijanca Juričine zarade?*

- **Neke poznate diskretne slučajne varijable(...)**

**Zadatak 2.5** $X \sim B(10, 0.1)$. *Koliko je* $\mathbb{P}(X = 2)$*?*

**Zadatak 2.6** *Pri prijavi ispita na studomatu vjerojatnost da dođe do greške u sustavu je 0.01.*

*a) Kolika je vjerojatnost da od 6 studenata barem dvoje neuspješno prijavi ispit?*

*b) Koliki je očekivani broj neuspješno prijavljenih studenata od 200 prijava?*

**Zadatak 2.7** *Student rješava ispit koji se sastoji od 5 pitanja s po 4 ponuđena odgovora, od kojih je samo 1 točan. Student se nije pripremio za ispit i na svako pitanje odgovara slučajnim odabirom. Sva pitanja nose po 1 bod, a za prolaz je potrebno skupiti bar 3 boda.*

*a) Kolika je vjerojatnost da student položi ispit?*

*b) Kolika je vjerojatnost da student padne ispit?*

*c) Koliki je očekivani broj bodova koje će student sakupiti?*

*d) Kad bi za prolaz bilo potrebno 40% (umjesto 60%) bodova, kolika bi mu tada bila vjerojatnost prolaza?*

**Zadatak 2.8** *Morske kornjače se izlegnu na obali i potim upute prema moru. Promatramo jednu kornjaču koja je stradala prije dolaska u more. Svaki se dan, nezavisno od ostalih dana, pomicala prema moru, a vjerojatnost da strada je svaki dan ista i iznosi 0.2.*

*a) Kolika je vjerojatnost da je kornjača stradala 4. dan nakon rođenja?*

*b) Kolika je vjerojatnost da je stradala u prva 4 dananakon rođenja?*

*c) Koliki je očekivani broj dana njezinog kretanja kopnom bez stradanja?*

**Zadatak 2.9** *Ako* $X \sim P(2)$, *koliko iznosi* $\mathbb{P}(X > 3)$*?*

## 2.2 Neprekidne slučajne varijable (...)

- **Normalna slučajna varijabla(...)**

Tablica distribucije normalne slučajne varijable:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/stat/files/norm.pdf`.

**Zadatak 2.10** *Neka je* $X \sim N(2, 4)$. *Odredite* $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)$.

**Zadatak 2.11** *Težina čovjeka može se modelirati slučajnom varijablom* $X \sim N(74, 8^2)$.

*a) Koliki je postotak ljudi koji su laksši od 60kg?*

*b) Iznad koje težine je 5% čovječanstva?*

## 2.3 Aproksimacija binomne razdiobe normalnom

**Zadatak 2.12** *Bacamo simetričan novčić 4000 puta. Neka $X$ označava broj pisama. Odredite vjerojatnost da je palo više od 1968, a manje od 2040 pisama.*

**Zadatak 2.13** *Vjerojatnost da boca soka ima neku nagradu ispod čepa je 0.4. Kolika je vjerojatnost da među 600 odabranih boca budu najviše 252 nagrade?*