Teorija igara

Rudi Mrazović

Prirodoslovno matematički fakultet – Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu
E-mail adresa: Rudi.Mrazovic@math.hr

Sadržaj

Predgovor v

Poglavlje 1. Strateške igre 1
1.1. Uvodni primjeri 1
1.2. Osnovne definicije 4
1.3. Nashov ekvilibrij 4
1.4. Ekonomski primjeri 7
1.5. Nashov teorem 14
1.6. Mješovita proširenja 17
1.7. Bimatrične igre 19
1.8. Igre sa sumom nula s dva igrača 21
1.9. Matrične igre 24
1.10. Rješavanje matričnih igara 25
1.1.10.1. Svođenje na linearno programiranje 25
1.1.10.2. Simpleks metoda 26
1.1.10.3. Još primjera; grafička metoda i dominacija 29
1.11. Dodatak: Teorem o minimaksu i dualnost linearnog programiranja 36
1.1.11.1. Farkasova lema 36
1.1.11.2. Dualnost linearnog programiranja 37
1.1.11.3. Dokaz teorema o minimaksu 38
1.1.11.4. Princip izjednačavanja 38
1.12. Korelirani ekvilibrij 39
Dodatni zadatak 42
1.13. Zanimljivosti 42

Poglavlje 2. Evolucijska teorija igara 43
2.1. Simetrične bimatrične igre i simetrični Nashovi ekvilibriji 43
2.2. Evolucijski stabilne strategije 45
2.3. Opcionalno: Dinamika replikacije 48

Poglavlje 3. Ekstenzivne igre 51
3.1. Ekstenzivne igre s potpunim informacijama 51
3.2. Općenita definicija 54
3.3. Nashov ekvilibrij 56
3.4. Potpuni čisti ekvilibrij po podigrama 58
3.5. Mješovite i bihevioralne strategije 62
3.6. Potpuni bayesovski i sekvencijalni ekvilibrij 66

Poglavlje 4. Kooperativne igre 72
4.1. Igre s pogodbom 72
4.2. Nashovo rješenje pogodbe 73

4.3. Kalai-Smorodinskyjevo rješenje pogodbe 77

Bibliografija 83

Predgovor

Ovo su bilješke s uvodnog kolegija iz teorije igara koji se održava tijekom zimskog semestra na PMF – Matematički odsjek u sklopu diplomskog studija. Čitatelje koji uoče greške bilo kakve prirode molim da na njih ukažu putem maila Rudiju Mrazoviću ili Nini Kamčev. Isto vrijedi i za sve komentare i sugestije koje bi mogle poboljšati izlaganje sadržaja. Ove bilješke velikim će dijelom pratiti izlaganje u [**GDGJFJ10**] i [**Pet08**].

U ovim bilješkama koristit ćemo **podebljani** font za pojmove koje upravo definiramo, a *kurziv* za stvari koje želimo naglasiti ili neformalno definirati.

Autor bilježaka je Rudi Mrazović, uz izmjene Nine Kamčev i Aleksandra Bulja. Posljednja izmjena napravljena je 8. studenoga 2026.

POGLAVLJE 1

Strateške igre

1.1. Uvodni primjeri

Krećemo in medias res s najpoznatijim primjerom iz teorije igara.

Primjer 1.1 (**Zatvorenikova dilema**). Ana i Branka osumnjičene su da su zajedničkim snagama opljačkale banku. Pred svakom od njih dvije su mogućnosti – negirati sve što im se stavlja na teret ili priznati. Ukoliko Ana prizna, a Branka nastavi negirati, istražitelji će njeno svjedočenje iskoristiti protiv Branke što će rezultirati kaznom zatvora od 15 godina, dok će Ana zahvaljujući suradnji s istražiteljima proći sa samo jednom godinom zatvora. Isto vrijedi i za slučaj da Branka prizna, a Ana nastavi negirati. Ako i Ana i Branka priznaju zločin, obje će biti kažnjene s 10 godina zatvora, budući da istražitelji tada imaju dva priznanja pa im niti jedno od njih nije od presudne važnosti. Konačno, ako i Ana i Branka nastave negirati, istražitelji neće imati dovoljno materijala da dokažu sudjelovanje u pljački, pa će svaka od njih biti kažnjena s 3 godine zatvora zbog manjeg zločina za kojeg istražitelji već imaju dovoljno dokaza. Iako se Ana i Branka mogu dogovarati kako će postupiti, ništa ih ne obvezuje da taj dogovor i ispoštuju. Nadalje, Ana i Branka svoju konačnu odluku donose istovremeno, odnosno niti jedna od njih u trenutku donošenja odluke ne može sa sigurnošću znati kako će druga postupiti.

Shematski možemo ovako zapisati situaciju s kojom su Ana i Branka suočene.

		Brankina odluka: negiranje	Brankina odluka: priznanje
Anina odluka	negiranje	Ana: 3 godine Branka: 3 godine	Ana: 15 godina Branka: 1 godina
	priznanje	Ana: 1 godina Branka: 15 godina	Ana: 10 godina Branka: 10 godina

Razmislimo sada o ovoj situaciji iz Anine perspektive. Kad bi Ana znala da će Branka priznati zločin, u interesu bi joj bilo da i ona prizna, budući da je tada očekuje 10 umjesto 15 godina zatvora. S druge strane, kad bi Ana znala da će Branka negirati zločin, opet bi joj bilo u interesu da prizna, jer će u tom slučaju proći s jednom umjesto s 3 godine zatvora. Dakle, u svakom slučaju Ani je u interesu da se odluči na priznanje. Potpuno istim nizom zaključivanja Branka dolazi do spoznaje da joj je najbolje sve priznati. Zaključak je da ukoliko se Ana i Branka odluče za ono što im se svakom čini kao najbolja strategija (priznanje), obje će dobiti po 10 godina zatvora. Međutim, kad bi se obje odlučile za to da sve negiraju, obje bi dobile manju kaznu. Zbog ovakvog se iznenađujućeg zaključka

zatvorenikova dilema često naziva *paradoksom*. Anu i Branku ništa ne spriječava da se dogovore da će i jedna i druga sve negirati, ali treba imati na umu da je takav dogovor iznimno nestabilan budući da je i jednoj i drugoj u interesu jednostrano ga prekršiti.

Zatvorenikova dilema osnovni je motivacijski primjer u teoriji igara, a njena osnovna karakteristika je da svaka od sudionica ima pred sobom niz mogućih odabira od kojih se jedan nameće kao *najbolji*. Međutim, kombinacija tih *najboljih* odabira sudionica dovodi do rezultata koji nije optimalan niti za jednu od njih. Ovakva situacija česta je u stvarnosti, što pokazuju sljedeći primjeri.

Primjer 1.2 (Ulaganja u marketing). Pretpostavimo za potrebe ovog primjera da *Pepsi* i *Coca-Cola* ostvaruju jednaki godišnji profit od prodaje gaziranih pića (npr. svaka po 20 milijardi eura), te da ulažu jednake svote u marketing. Zašto se ove dvije kompanije ne bi jednostavno dogovorile da smanje ulaganja u marketing (npr. svaka za 5 milijardi eura godišnje), te tako nastave dijeliti tržište u istom omjeru, ali uz veći profit (zbog manjih troškova marketinga)?

U situaciji u kojoj jedna tvrtka u marketing ulaže 5 milijardi eura više od konkurenta za očekivati je da će se odnos snaga na tržištu gaziranih pića promijeniti u korist kompanije koja ima jači marketing. Pretpostavimo da ta tvrtka u takvoj situacija ostvaruje profit od 30 milijardi eura, dok tvrtka koja je smanjila ulaganja ostvaruje profit od 15 milijardi eura.

Stavimo se u poziciju *Pepsija*. Ima li smisla da *Pepsi* smanji ulaganja u marketing za 5 milijardi eura? Ukoliko *Coca-Colina* ulaganja ostanu nepromijenjena, to bi značilo da će *Pepsi* ostvarivati profit od 15 milijardi eura, 5 milijardi eura manje nego prije. S druge strane, ako i *Coca-Cola* odluči smanjiti ulaganja za 5 milijardi eura, *Pepsi* će ostvarivati profit od 25 milijardi eura, 5 milijardi manje nego da je ostao pri jednakim ulaganjima u marketing. U svakom slučaju, zaključujemo da je *Pepsiju* bolje da nastavi s velikim ulaganjima u marketing. Analogno dolazimo do istog zaključka za *Coca-Colu*. Slično kao u prethodnom primjeru, situaciju prikazujemo shematski:

Pepsijevo ulaganje u marketing	*Coca-Colino* ulaganje u marketing: veliko	*Coca-Colino* ulaganje u marketing: malo
veliko	*Pepsi*: 20 milijardi € *Coca-Cola*: 20 milijardi €	*Pepsi*: 30 milijardi € *Coca-Cola*: 15 milijardi €
malo	*Pepsi*: 15 milijardi € *Coca-Cola*: 30 milijardi €	*Pepsi*: 25 milijardi € *Coca-Cola*: 25 milijardi €

Slično kao i kod zatvorenikove dileme, uočavamo da je dobivena *racionalna* kombinacija u kojoj obje kompanije ulažu velike svote u marketing nepovoljnija za svaku od njih od kombinacije u kojoj obje kompanije ulažu skromnije svote. Usprkos tome, nije za očekivati da će se kompanije uspješno dogovoriti za smanjenje ulaganja u marketing budući da bi i jednoj i drugoj strani bilo u interesu taj dogovor jednostrano prekršiti.

Primjer 1.3 (Nuklearno naoružanje). Sredinom prošlog stoljeća SAD i SSSR bile su jedine dvije zemlje koje su posjedovale nuklearno oružje te je poznato da su u njegovo razvijanje i održavanje

ulagale ogroman dio obrambenog budžeta. Uzevši u obzir doktrinu nuklearnog odvraćanja (eng. *nuclear deterrence*) prema kojoj je zbog mogućnosti nuklearne odmazde vojni napad na nuklearnu silu malo vjerojatan, dolazimo do zaključka da je bilo malo vjerojatno da će SAD iskoristiti nuklearno oružje u napadu na SSSR i obratno. Nije li stoga za te dvije države bilo pametnije da se dogovore da više neće imati nuklearno oružje? U toj situaciji vojna ravnoteža ostala bi nepromijenjena, dok bi i jedna i druga država ostvarile uštede budući da više ne bi trebale izdvajati za svoj nuklearni arsenal. Situaciju ponovno prikazujemo shematski:

SAD-ovo nuklearno naoružanje \ SSSR-ovo nuklearno naoružanje	ima ga	nema ga
ima ga	nijedna država nije u prednosti + obje države potrošile novac	SAD je u prednosti
nema ga	SSSR je u prednosti	nijedna država nije u prednosti + obje države ostvarile uštede

Sličnom analizom kao u prethodnim primjerima dolazimo do zaključka da je i SAD-u i SSSR-u bilo u interesu imati nuklearni arsenal. Drugim riječima, čak i da su se te dvije sile dogovorile da neće razvijati nuklearno oružje, taj bi dogovor bio nestabilan budući da bi i jednoj i drugoj strani bilo u interesu da ga prekrši. Sličan model dao bi isti zaključak i u današnje vrijeme kada postoji puno više država s nuklearnim oružjem.

Primjer 1.4 (**Paradoks štedljivosti**). U doba ekonomske recesije svako kućanstvo ima motiv za štednju – tijekom recesije otkazi i niže plaće česta su pojava pa oprez oko potrošnje nije iznenađujuć. Međutim, kolektivno stezanje remena i samim time drastično smanjenje potražnje predstavlja katastrofu za ekonomiju pa posljedično i za dohodak kućanstava. Drugim riječima, situacija u kojoj svi odluče štedjeti dovodi do smanjenja dohodaka, a time i štednje.

Ovo opažanje popularizirao je veliki britanski ekonomist John Maynard Keynes, te je danas poznato kao paradoks štedljivosti (eng. *paradox of thrift*). Keynesov predloženi lijek za ovakve situacije bila je državna intervencija koja bi potaknula potražnju u ekonomiji (npr. iz državnog proračuna financirani infrastrukturni projekti).

Što je teorija igara? Teorija igara predstavlja matematički okvir za analizu strateških odluka u interakciji racionalnih sudionika. Primjene su brojne: u ekonomiji se koristi za proučavanje konkurencije, aukcija i određivanja cijena, u politici za analizu pregovora i međunarodnih odnosa, u društvenim znanostima za razumijevanje suradnje, normi i kolektivnog djelovanja, dok u računarstvu pronalazi važnu ulogu u optimizaciji, istraživanju multi-agent sustava i dizajnu mehanizama.

Teorija igara je kompleksna radi svoje interdisciplinarnosti. Matematička teorija igara daje stroge modele racionalnog ili sebičnog ponašanja, dok društvene znanosti ističu psihološke, bihevioralne i sociološke aspekte. Dizajn mehanizama povezuje ta dva pristupa stvaranjem sustava u kojima pojedinačni interesi vode do društveno poželjnih ishoda.

Važno je naglasiti da se radi o dinamičnom području koje je još uvijek u razvoju. Definicije i izbor modela nisu uklesane u kamen, već su stvorene za modeliranje stvarnih problema. To čini teoriju igara izvrsnom prilikom za vježbu u matematičkom modeliranju, kritičkom razmišljanju i diskusiji teorije.

1.2. Osnovne definicije

Vratimo se na zatvorenikovu dilemu preko koje ćemo uvesti neke osnovne definicije. Shemu iz Primjera 1.1 možemo malo kompaktnije napisati u obliku sljedeće tablice.

$$\begin{array}{c} \\ \text{N(egiranje)} \\ \text{P(riznanje)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{N(egiranje)} & \text{P(riznanje)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3,-3 & -15,-1 \\ -1,-15 & -10,-10 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Retci ove tablice odgovaraju Aninim strategijama, a stupci Brankinim. Nadalje, kod svakog uređenog para u tablici, prvi član označava Aninu kaznu, a drugi Brankinu. Na primjer, element $(-15,-1)$ u tablici označava da ukoliko se Ana odluči na N(egiranje), a Branka na P(riznanje), Ana će dobiti kaznu od 15 godina, dok će Branka proći s kaznom od jedne godine zatvora. Sve brojeve gledamo iz perspektive Ane i Branke – drugim riječima, svakoj od njih više odgovaraju veće pripadne vrijednosti[1].

Prije svega, radi jednostavnijih oznaka, Anu ćemo smatrati prvim, a Branka drugim igračem. Svakoj od njih na raspolaganju su neke strategije – neka Ana svoje strategije bira iz skupa A_1, a Branka iz skupa A_2. Dakle, $A_1 = A_2 = \{\mathrm{N}, \mathrm{P}\}$. Sve moguće ishode njihovih odabira strategija sadržavat će skup $\mathcal{A} = A_1 \times A_2$. Dakle,

$$\mathcal{A} = \{(\mathrm{N},\mathrm{N}), (\mathrm{N},\mathrm{P}), (\mathrm{P},\mathrm{N}), (\mathrm{P},\mathrm{P})\}.$$

Međutim, nama nije od interesa samo znati koji su svi mogući ishodi odabira strategija, već i koliko svaki od tih ishoda odgovara svakom od igrača. U tu svrhu definiramo funkcije korisnosti $u_1, u_2 \colon \mathcal{A} \to \mathbf{R}$. Konkretno, kod Ane imamo, $u_1(\mathrm{N},\mathrm{N}) = -3$, $u_1(\mathrm{N},\mathrm{P}) = -15$, $u_1(\mathrm{P},\mathrm{N}) = -1$ i $u_1(\mathrm{P},\mathrm{P}) = -10$. Čitatelju ostavljamo da na sličan način zapiše i Brankinu funkciju u_2. Na ovaj smo način modelirali primjer zatvorenikove dileme i u duhu toga uvodimo sljedeću općenitu definiciju.

Definicija 1.5. **Strateška igra s n igrača** je uređeni par $(\mathcal{A}, u)$ koji se sastoji od sljedećih elemenata:

- Za svaki $i = 1, \ldots, n$ neka je $A_i \neq \emptyset$ **skup strategija igrača** i. Skup $\mathcal{A} = A_1 \times \cdots \times A_n$ nazivamo **skupom strateških profila**.
- Za svaki $i = 1, \ldots, n$ neka je $u_i \colon \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ **funkcija korisnosti igrača** i. Funkciju $u = (u_1, \ldots, u_n) \colon \mathcal{A} \to \mathbf{R}^n$ nazivamo **funkcijom korisnosti**.

Vratimo se još malo na zatvorenikovu dilemu. Uočimo da strateški profil (P,P) ima svojstvo svojevrsne *stabilnosti* – ukoliko su do sada uvijek igrali po tom strateškom profilu, i za Anu i za Branku vrijedi da mogu profitirati promjenom uhodane strategije (s priznanja na negiranje) jedino ukoliko pouzdano znaju da će se i druga osoba za to odlučiti. Drugim riječima, radi se o strateškom profilu kod kojeg niti jednom od igrača nije u interesu jednostrano promijeniti strategiju. Ovo opažanje navodi nas na uvođenje vjerojatno najbitnijeg koncepta u ovim bilješkama.

1.3. Nashov ekvilibrij

U analizi strateških igara često ćemo se staviti u poziciju jednog konkretnog igrača i, te razmišljati o njegovom najboljem odgovoru na neke fiksirane strategije preostalih igrača. Iz tog razloga, za $a \in \mathcal{A}$ i $a_i' \in A_i$ s (a_{-i}, a_i') označavat ćemo strateški profil

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

[1] To je i razlog negativnih brojeva.

Drugim riječima, strateški profil (a_{-i}, a_i') dobivamo iz strateškog profila a tako da strategiju a_i igrača i zamijenimo sa strategijom a_i'.

DEFINICIJA 1.6. **Nashov ekvilibrij** strateške igre $(\mathcal{A}, u)$ s n igrača je strateški profil $a^* \in \mathcal{A}$ za koji vrijedi da je za svakog igrača $i = 1, \ldots, n$

$$u_i(a^*) \geqslant u_i(a^*_{-i}, a_i) \quad \text{za svaki } a_i \in A_i.$$

Ako otpakiramo ovu definiciju vidimo da Nashov ekvilibrij a^* ima svojstvo da ukoliko neki igrač i zna da su se preostali igrači $(j \neq i)$ odlučili za strategije a_j^*, tada je najbolji odgovor igrača i upravo strategija a_i^*.

O Nashovim ekvilibrijima i općenitim strateškim profilima često je korisno razmišljati *dinamički*. Drugim riječima, zamislimo da neku igru isti igrači igraju više puta. Je li za očekivati da će u svakom koraku mijenjati strategije? Postoje li neke situacije u kojima će se igrači držati iste strategije kao u prethodnim igrama? Nashovi ekvilibriji su strateški profili koji imaju određeno svojstvo stabilnosti – ako su igrači višestrukim igranjem iste igre te isprobavanjem raznih strategija došli do toga da njihove trenutne strategije čine neki Nashov ekvilibrij, vrlo je moguće da od tih trenutnih strategija u budućnosti više neće odstupati budući da nitko od njih ne može povećati svoju korisnost bez da još barem jedan drugi igrač promijeni svoju strategiju. S druge strane, ako strateški profil nije Nashov ekvilibrij intuitivno ga smatramo vrlo nestabilnim budući da je barem jednom od igrača u interesu promijeniti strategiju kako si bi povećao dobitak. Štoviše, u praksi je česti slučaj da kod višestrukih igranja iste igre pripadni strateški profili na neki način *konvergiraju* prema nekom Nashovom ekvilibriju.

Prokomentirajmo što bi bili Nashovi ekvilibriji u primjerima s kojima smo se susreli u Odjeljku 1.1.

PRIMJER 1.7.

- U Primjeru 1.2 (ulaganja u marketing) u Nashovom ekvilibriju i *Pepsi* i *Coca-Cola* ulažu velike svote u marketing.
- U Primjeru 1.3 (nuklearno naoružanje) i SAD i SSSR imaju nuklearno oružje.
- U Primjeru 1.4 (paradoks štedljivosti) svi ljudi u vrijeme recesije štede.

Nashov ekvilibrij ne mora biti jedinstven, a ne mora nužno ni postojati, kao što pokazuje sljedeći primjer.

ZADATAK 1.1 (Igre sa dva igrača). (a) Svaki od dva igrača neovisno od drugog odabire neki paran ili neparan broj. Prvi igrač pobjeđuje ukoliko im je suma paran broj, a drugi ukoliko im je suma neparan broj.
Navedite skupove strategija i funkcije korisnosti ove igre. (Napominjemo da rješenje nije jedinstveno.) Dokažite da niti jedan strateški profil ne zadovoljava uvjete Nashovog ekvilibrija.

(b) Promatrajmo igru sa dva igrača, putnikom i kondukterom. Putnik može kupiti kartu ili se voziti bez karte i riskirati kaznu. Kondukter može odlučiti želi li izaći iz kuće na kišni dan i provjeriti putnika.
Navedite skupove strategija i funkcije korisnosti ove igre. (Napominjemo da rješenje nije jedinstveno.) Ima li Vaša verzija igre Nashov ekvilibrij?

(c) Izmislite igru koja odgovara sljedećoj tablici. Ima li igra Nashov ekvilibrij?

$$\begin{array}{c} \\ \text{T1} \\ \text{T2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{S1} & \text{S2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4,4 & 0,2 \\ 2,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Rješenje. (a)Strategije igrača i jedna mogućnost za funkciju korisnosti prikazani su u sljedećoj tablici.

$$\begin{array}{c} \\ \text{par} \\ \text{nepar} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{par} & \text{nepar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Strateški profil (par, par) ne zadovoljava uvjete Nashovog ekvilibrija jer je očekivana korisnost drugo igrača veća sa u profilu (par, nepar) (dakle, isplati mu se promjena strategije). Slično se provjeri da niti jedan strateški profil ne zadovoljava uvjete Nashovog ekvilibrija.
(b) Jedna mogućnost je

$$\begin{array}{c} \\ \text{s kartom} \\ \text{bez karte} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ne provjeriti} & \text{provjeriti} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2,0 & 0,-1 \\ 10,-10 & -100,99 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(Brojke su proizvoljne, one procjenjuju zadovoljstvo igrača željenim ishodom, a ne nužno ekonomski dobitak).
Ova igra nema Nashov ekvilibrij (primjerice, u strateškom profilu (bez karte, ne provjeriti) se kondukteru više isplati ipak provjeriti karte).
(c) Nashovi ekvilibriji su (T1, S1) i (T2, S2). Moguća priča je: dva lovca mogu loviti jelena ili zeca. Za jelena moraju surađivati, a zeca može uloviti svaki lovac individualno. Ukoliko oboje love istu životinju, moraju podijeliti ulov.

Primjer 1.8 (Pogađanje dvije trećine prosjeka [**Led81**]). Svaki od n igrača treba na papir zapisati neki broj iz $[0, 100]$ i svakome od njih je cilj biti što je bliže broju koji je jednak dvije trećine prosjeka svih brojeva koje su igrači zapisali. Prije nego što prijeđemo na pronalazak Nashovog ekvilibrija u ovoj igri, pogledajmo kako bi *zdravorazumski* netko mogao pristupiti odabiru svog broja.

Prosjek očito može biti najviše 100, pa dvije trećine prosjeka najviše može iznositi $\frac{2}{3} \cdot 100$. Stoga svaki igrač može zaključiti da *nema smisla* da odabere broj veći od $\frac{2}{3} \cdot 100$ jer bi od toga sigurno bolji izbor bio da jednostavno napiše $\frac{2}{3} \cdot 100$. Međutim, taj igrač može potom razmišljati da će i svi ostali igrači, ako su dovoljno pametni, doći do istoga zaključka, što znači da će svaki igrač navesti najviše $\frac{2}{3} \cdot 100$ kao svoj izbor. Međutim, sada igrači jednako kao prije mogu zaključiti da prosjek neće biti veći od $\frac{2}{3} \cdot 100$, pa dvije trećine prosjeka neće biti veće od $(\frac{2}{3})^2 \cdot 100$. Samim time, izgleda da nema smisla navoditi brojeve veće od $(\frac{2}{3})^2 \cdot 100$ jer će $(\frac{2}{3})^2 \cdot 100$ biti bolji izbor. Na isti se način nastavlja dalje i zaključuje da ne treba navoditi brojeve veće od $(\frac{2}{3})^n \cdot 100$ niti za koji n, tj. da svaki igrač treba navesti 0 kao svoj izbor.[2]

Pažljivi čitatelj uočit će da smo prethodnom raspravom u biti dokazali da je $(0, \ldots, 0)$ Nashov ekvilibrij opisane igre. Pokažimo to i na standardniji način koji se nešto direktnije poziva na definiciju Nashovog ekvilibrija. Pretpostavimo da postoji neki Nashov ekvilibrij a^*. Ukoliko igrač i zna da su se preostali igrači odlučili za brojeve $a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, \ldots, a_n^*$, tada a_i^* mora biti njegov najbolji odgovor na njihove odabire, odnosno

$$a_i^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_1^* + \cdots + a_n^*}{n}.$$

Sumiranjem ovih jednakosti za sve i, dobivamo da je

$$a_1^* + \cdots + a_n^* = \frac{2}{3}(a_1^* + \cdots + a_n^*),$$

[2] Naravno, u praksi odabir broja 0 gotovo nikad neće biti optimalan jer gotovo nikad nisu svi igrači potpuno racionalni. Na primjer, danske novine *Politiken* [**Sch05**] provele su igru na preko 19000 čitatelja i prosjek njihovih izbora je iznosio oko 22.3, što znači da je dobitni broj bio oko 14.4.

odnosno da je $a_1^*+\cdots+a_n^*=0$. Budući da je $a_1^*,\ldots,a_n^*\in[0,100]$, zaključujemo da je $a_1^*=\cdots=a_n^*=0$. Ovime smo pokazali da je $(0,\ldots,0)$ jedini *mogući* Nashov ekvilibrij, a da to doista *je* Nashov ekvilibrij trivijalno se vidi iz definicije.

Prije nego što navedemo još nekoliko primjera igara i njihovih Nashovih ekvilibrija uvest ćemo pojam korespondencije najboljeg odgovora koji prirodno proizlazi iz definicije Nashovog ekvilibrija.

Za proizvoljne neprazne skupove X i Y funkciju F koja svakom elementu iz X pridružuje podskup skupa Y nazivat ćemo **korespondencijom** iz X u Y, te ćemo, malo neprecizno[3], pisati $F\colon X\to Y$. Drugim riječima, F je *poopćenje funkcije* koje svakom elementu domene pridružuje *proizvoljno mnogo* elemenata kodomene (za razliku od *točno* jednog u slučaju prave funkcije).

Definicija 1.9. Za stratešku igru $(\mathcal{A},u)$ s n igrača i proizvoljnog igrača i neka je $\mathcal{A}_{-i}=A_1\times\cdots\times A_{i-1}\times A_{i+1}\times\cdots\times A_n$. Nadalje, za proizvoljni strateški profil $a\in\mathcal{A}$ neka je

$$a_{-i}=(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)\in\mathcal{A}_{-i}.$$

Korespondencija najboljeg odgovora igrača i je korespondencija $\mathrm{BR}_i\colon\mathcal{A}_{-i}\to A_i$ s pravilom pridruživanja

$$\mathrm{BR}_i(a_{-i})=\{a_i\in A_i\colon u_i(a_{-i},a_i)=\max_{a_i'\in A_i}u_i(a_{-i},a_i')\}.$$

Korespondencija najboljeg odgovora je korespondencija $\mathrm{BR}\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ s pravilom pridruživanja

$$\mathrm{BR}(a)=\mathrm{BR}_1(a_{-1})\times\cdots\times\mathrm{BR}_n(a_{-n}).$$

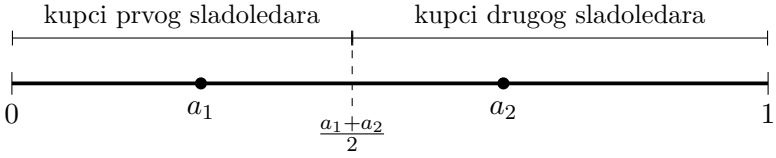
Iz prethodne definicije vidljivo je da će neki strateški profil a^* biti Nashov ekvilibrij ako i samo ako je $a_i^*\in\mathrm{BR}_i(a_{-i}^*)$ za sve igrače i, što je ekvivalentno sa zahtjevom $a^*\in\mathrm{BR}(a^*)$.

1.4. Ekonomski primjeri

Primjer 1.10 (**Sladoledari na plaži**). Dva sladoledara postavljaju svoje štandove na plaži koju modeliramo segmentom $[0,1]$. Kupači su jednoliko raspoređeni duž plaže i svaki od njih kupuje točno jedan sladoled, i to na štandu koji mu je bliži; ako su mu oba štanda jednako udaljena, bira nasumično, pa svaki štand dobiva polovicu takvih kupača. Sladoled je na oba štanda jednake cijene i kvalitete, pa je jedina odluka svakog sladoledara *gdje* postaviti štand. Oba sladoledara položaj biraju istovremeno, a svakome je cilj prodati što više sladoleda.

Radi se, dakle, o strateškoj igri s dva igrača u kojoj je $A_1=A_2=[0,1]$, a strateški profil (a_1,a_2) opisuje položaje štandova. Neka je $a_1<a_2$. Kupač na položaju $t\in[0,1]$ kupuje kod prvog sladoledara ako je $|t-a_1|<|t-a_2|$, što je ekvivalentno s $t<\frac{a_1+a_2}{2}$. Prvom sladoledaru stoga pripadaju svi kupači sa segmenta $[0,\frac{a_1+a_2}{2}\rangle$, a drugome oni sa segmenta $\langle\frac{a_1+a_2}{2},1]$ (kupač točno na polovištu je zanemariv). Kako su kupači jednoliko raspoređeni, broj kupača proporcionalan je duljini pripadnog segmenta, pa za funkcije korisnosti možemo uzeti udjele u ukupnoj prodaji:

$$u_1(a_1,a_2)=\begin{cases}\dfrac{a_1+a_2}{2}, & a_1<a_2,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & a_1=a_2,\\[2mm] 1-\dfrac{a_1+a_2}{2}, & a_1>a_2,\end{cases}\qquad u_2(a_1,a_2)=1-u_1(a_1,a_2).$$



[3] Neprecizno jer je F u biti funkcija $F\colon X\to\mathcal{P}(Y)$, gdje je $\mathcal{P}(Y)$ partitivni skup od Y.

Nashov ekvilibrij. Tvrdimo da je $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ jedini Nashov ekvilibrij ove igre: oba sladoledara postave štandove jedan uz drugi, na sredini plaže.

Najprije, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ jest Nashov ekvilibrij. Pretpostavimo da drugi sladoledar igra $a_2=\frac{1}{2}$. Za $a_1<\frac{1}{2}$ je $u_1(a_1,\frac{1}{2})=\frac{a_1+1/2}{2}<\frac{1}{2}$, za $a_1>\frac{1}{2}$ je $u_1(a_1,\frac{1}{2})=1-\frac{a_1+1/2}{2}<\frac{1}{2}$, a za $a_1=\frac{1}{2}$ je $u_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Dakle, $a_1=\frac{1}{2}$ je najbolji odgovor prvog sladoledara, i to jedini, tj. $\mathrm{BR}_1(\frac{1}{2})=\{\frac{1}{2}\}$. Zbog simetrije igre isto vrijedi i za drugog sladoledara, pa je $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in\mathrm{BR}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Pokažimo da drugih Nashovih ekvilibrija nema. Neka je (a_1,a_2) Nashov ekvilibrij.

- Ako je $a_1<a_2$, prvi sladoledar može odabrati bilo koji $a_1'\in\langle a_1,a_2\rangle$ i dobiti
$$u_1(a_1',a_2)=\frac{a_1'+a_2}{2}>\frac{a_1+a_2}{2}=u_1(a_1,a_2),$$
što je u suprotnosti s definicijom Nashovog ekvilibrija. Slučaj $a_1>a_2$ isključuje se analogno (ili zamjenom uloga igrača). Dakle, $a_1=a_2=:a$.
- Ako je $a<\frac{1}{2}$, tada je $a<1-a$, pa prvi sladoledar može odabrati $a_1'\in\langle a,1-a\rangle$ i dobiti
$$u_1(a_1',a)=1-\frac{a+a_1'}{2}>1-\frac{a+(1-a)}{2}=\frac{1}{2}=u_1(a,a).$$
Ako je $a>\frac{1}{2}$, analogno odabere $a_1'\in\langle 1-a,a\rangle$ i dobije $u_1(a_1',a)=\frac{a_1'+a}{2}>\frac{(1-a)+a}{2}=\frac{1}{2}$. Dakle, $a=\frac{1}{2}$.

Što je najbolje za kupače? Sladoledarima je, u smislu prodaje, svejedno: u svakom simetričnom profilu $(a,1-a)$, pa i u ekvilibriju $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, svaki od njih proda polovicu sladoleda. Kupačima, međutim, nije svejedno – njima je važno koliko moraju hodati do najbližeg štanda. Zamislimo kupača koji dolazi na plažu i smjesti se na slučajno mjesto T, jednoliko distribuirano na $[0,1]$. Po sladoled odlazi do bližeg štanda, pa prijeđe put duljine $\min\{|T-a_1|,|T-a_2|\}$. Za profil (a_1,a_2), $a_1\leqslant a_2$, očekivana duljina njegova puta iznosi

$$\begin{aligned}D(a_1,a_2)&=\mathbb{E}\min\{|T-a_1|,|T-a_2|\}=\int_0^1\min\{|t-a_1|,|t-a_2|\}\,dt\\&=\int_0^m|t-a_1|\,dt+\int_m^1|t-a_2|\,dt,\qquad m=\frac{a_1+a_2}{2},\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili da kupač ide k prvom štandu ako je $T<m$, a k drugom ako je $T>m$. Želimo odrediti profil (a_1,a_2) u kojem je D najmanji. Dat ćemo dva rješenja.

Prvi način: medijan. Uvjetujemo li po tome kojem štandu kupač ide, gornja jednakost glasi

$$\begin{aligned}D(a_1,a_2)&=\mathbb{P}(T<m)\mathbb{E}\big[|T-a_1|\mid T<m\big]+\mathbb{P}(T>m)\mathbb{E}\big[|T-a_2|\mid T>m\big]\\&=m\,\mathbb{E}|U_1-a_1|+(1-m)\,\mathbb{E}|U_2-a_2|,\end{aligned}$$

gdje je U_1 jednoliko distribuirana na $[0,m]$, a U_2 jednoliko na $[m,1]$ (jednolika slučajna varijabla, uz uvjet da padne u neki podsegment, opet je jednoliko distribuirana na tom podsegmentu). Sada koristimo sljedeću činjenicu: ako je U jednoliko distribuirana na segmentu duljine ℓ, onda za svaki $c\in\mathbf{R}$ vrijedi

$$\mathbb{E}|U-c|\geqslant\frac{\ell}{4},$$

s jednakošću ako i samo ako je c polovište segmenta. Doista, funkcija $c\mapsto\mathbb{E}|U-c|$ je konveksna (kao očekivanje konveksnih funkcija $c\mapsto|u-c|$), a njezina je derivacija $\mathbb{P}(U<c)-\mathbb{P}(U>c)$, koja iščezava točno kad je c medijan od U, tj. polovište segmenta. U polovištu je pak $|U-c|$ jednoliko distribuirana na $[0,\frac{\ell}{2}]$, pa je $\mathbb{E}|U-c|=\frac{\ell}{4}$. Primijenimo li to na U_1 (uz $\ell=m$) i U_2 (uz $\ell=1-m$), dobivamo

$$D(a_1,a_2)\geqslant m\cdot\frac{m}{4}+(1-m)\cdot\frac{1-m}{4}=\frac{m^2+(1-m)^2}{4}=\frac{1}{8}+\frac{(m-\frac{1}{2})^2}{2}\geqslant\frac{1}{8},$$

s jednakošću ako i samo ako je $m=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{m}{2}=\frac{1}{4}$ i $a_2=\frac{1+m}{2}=\frac{3}{4}$.

Drugi način: eksplicitni račun. Oba integrala možemo i neposredno izračunati. Kako je $a_1 \leqslant m \leqslant a_2$, imamo

$$\int_0^m |t-a_1|\,dt = \int_0^{a_1} (a_1-t)\,dt + \int_{a_1}^m (t-a_1)\,dt = \frac{a_1^2}{2} + \frac{(m-a_1)^2}{2},$$
$$\int_m^1 |t-a_2|\,dt = \int_m^{a_2} (a_2-t)\,dt + \int_{a_2}^1 (t-a_2)\,dt = \frac{(a_2-m)^2}{2} + \frac{(1-a_2)^2}{2},$$

pa je, zbog $m - a_1 = a_2 - m = \frac{a_2-a_1}{2}$,

$$D(a_1,a_2) = \frac{a_1^2}{2} + \frac{(a_2-a_1)^2}{4} + \frac{(1-a_2)^2}{2}.$$

(Tri pribrojnika su doprinosi triju skupina kupača: onih lijevo od a_1, onih između štandova i onih desno od a_2.) Tu kvadratnu funkciju treba minimizirati na trokutu $\{0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 1\}$. Parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial D}{\partial a_1} = a_1 - \frac{a_2-a_1}{2} = \frac{3a_1-a_2}{2}, \qquad \frac{\partial D}{\partial a_2} = \frac{a_2-a_1}{2} - (1-a_2) = \frac{3a_2-a_1-2}{2},$$

i obje iščezavaju samo u točki $(a_1,a_2) = (\frac{1}{4},\frac{3}{4})$, koja leži u unutrašnjosti trokuta. Hesseova matrica $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ pozitivno je definitna (svojstvene vrijednosti su 1 i 2), pa je D strogo konveksna na cijelom $\mathbf{R}^2$ i stacionarna je točka njezin jedinstveni globalni minimum – posebno i minimum na trokutu – s vrijednošću $D(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$. Isti zaključak dobivamo i bez deriviranja, nadopunom do potpunih kvadrata:

$$D(a_1,a_2) = \frac{1}{8} + \frac{(a_1-\frac{1}{4})^2 + (a_2-\frac{3}{4})^2}{2} + \frac{(a_2-a_1-\frac{1}{2})^2}{4},$$

odakle je odmah $D \geqslant \frac{1}{8}$, s jednakošću točno za $(a_1,a_2) = (\frac{1}{4},\frac{3}{4})$.

Dakle, za kupače je idealan profil $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$: očekivana duljina puta do najbližeg štanda tada iznosi $\frac{1}{8}$, dok u Nashovom ekvilibriju kupači hodaju u prosjeku dvostruko više, $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \mathbb{E}|T-\frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ (uz $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ duljina puta $|T-\frac{1}{2}|$ jednoliko je distribuirana na $[0,\frac{1}{2}]$). (Isto vrijedi i za najveću duljinu puta koju neki kupač mora prijeći: $\frac{1}{4}$ u profilu $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$, a $\frac{1}{2}$ u ekvilibriju.)

Situacija je stoga posve analogna zatvorenikovoj dilemi: profil $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ bolji je za društvo od Nashovog ekvilibrija (za kupače je bolji, a za sladoledare jednako dobar), ali je nestabilan – svakom je sladoledaru u interesu jednostrano ga prekršiti pomakom prema sredini – pa racionalno ponašanje oba sladoledara vodi u profil $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Primjer 1.11 (**Cournotov oligopol** [Cou38]). Neki proizvod na tržištu proizvodi n proizvođača. Svaki proizvođač i treba se odlučiti za količinu proizvoda $q_i \in [0,\infty)$ koju će proizvesti te plasirati na tržište. Pretpostavimo da su za svakog proizvođača troškovi proizvodnje jednog proizvoda jednaki nekom $c > 0$. Cijena po kojoj će se proizvod prodavati ovisi o njegovoj zastupljenosti na tržištu te je motivirani zakonom ponude i potražnje modeliramo s

$$p(q) = \max(1 - q^\Sigma, 0)$$

pri čemu je $q = (q_1,\dots,q_n)$ vektor količina za koje su se proizvođači odlučili, a $q^\Sigma = q_1 + \cdots + q_n$ ukupna zastupljenost proizvoda na tržištu. Očekivani profit (odnosno korisnost) proizvođača i stoga iznosi

$$u_i(q) = q_i(p(q) - c).$$

Uočimo da smo ovime definirali jednu stratešku igru s n igrača.

Koja je najbolja količina (tj. strategija) za koju se proizvođač i može odlučiti ukoliko su se ostali proizvođači odlučili za količine $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$? Neka je q_{-i}^{Σ} suma komponenata vektora q_{-i}, odnosno ukupna količina za koju su se odlučili preostali proizvođači.

Ako je $q_{-i}^{\Sigma} \geqslant 1$, tada će se proizvod prodavati po cijeni 0 štogod da proizvođač i odlučio, tako da mu je najbolja odluka ništa ne proizvoditi te tako ostvarivati profit 0. Pretpostavimo stoga da je $q_{-i}^{\Sigma} < 1$. Za svaki $q_i \in [0, 1 - q_{-i}^{\Sigma}]$, profit proizvođača i iznosit će

$$u_i(q_i, q_{-i}) = q_i(1 - q_i - q_{-i}^{\Sigma} - c), \tag{1.1}$$

dok će se za $q_i \notin [0, 1 - q_{-i}^{\Sigma}]$ proizvod ponovno prodavati po cijeni 0 pa je proizvođaču i opet najbolje ništa ne proizvoditi. Odredimo stoga maksimum desne strane u (1.1) shvaćene kao funkcije u varijabli q_i. Budući da se radi o kvadratnoj funkciji s negativnim vodećim članom, maksimum će se poprimiti u tjemenu osim ako tjeme nije lijevo od 0 u kojem se slučaju maksimum postiže u 0. Dakle, najbolji odgovor je[4]

$$\mathrm{BR}_i(q_{-i}) = \max\Big(\frac{1 - q_{-i}^{\Sigma} - c}{2}, 0\Big). \tag{1.2}$$

Da bi neki q^* bio Nashov ekvilibrij treba vrijediti $q_i^* = \mathrm{BR}_i(q_{-i}^*)$ za sve proizvođače i.[5] Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je za proizvođače $i = 1, \dots, m$ maksimum u (1.2) > 0, dok je za preostale jednak 0. Tada je $q_{m+1}^* = \cdots = q_n^* = 0$, dok za preostale proizvođače dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2q_1^* + q_2^* + \cdots + q_m^* &= 1 - c \\ q_1^* + 2q_2^* + \cdots + q_m^* &= 1 - c \\ &\vdots \\ q_1^* + q_2^* + \cdots + 2q_m^* &= 1 - c. \end{aligned}$$

Oduzimanjem jednadžbi jedne od druge dobivamo da je $q_1^* = \cdots = q_m^*$. Međutim, to znači da je svaki od njih jednak $\frac{1-c}{m+1}$, pa vraćanjem u (1.2) dobivamo da je za proizvoljni $i = m+1, \dots, n$

$$\mathrm{BR}_i(q_{-i}^*) = \max\Big(\frac{1 - c}{2(m+1)}, 0\Big).$$

Budući da je $\frac{1-c}{2(m+1)} > 0$, to je u kontradikciji s $\mathrm{BR}_i(q_{-i}^*) = q_i^* = 0$. Dakle, moramo imati da je $m = n$, pa je

$$q_1^* = \cdots = q_n^* = \frac{1 - c}{n + 1}.$$

Uočimo da je u dobivenom jedinstvenom ekvilibriju ukupna količina proizvoda jednaka

$$q^{*\Sigma} = \frac{n}{n+1}(1 - c),$$

cijena

$$p(q^*) = c + \frac{1 - c}{n + 1},$$

a profit svakog proizvođača

$$u_i(q^*) = \Big(\frac{1 - c}{n + 1}\Big)^2.$$

Kada pustimo $n \to \infty$, vidimo da ukupna količina teži prema $1 - c$, cijena prema c, a profit svakog proizvođača (čak i ukupni profit svih proizvođača) u 0. Ovakvu situaciju nazivamo potpuno kompetitivni ekvilibrij. S druge strane, kada postoji malo proizvođača, vidimo da je cijena značajno viša od kompetitivne c, a ukupna ponuda (količina) značajno niža od kompetitivne $1 - c$.

[4] Iako je $\mathrm{BR}_i(q_{-i})$ u općenitom slučaju neki skup, ovdje je taj skup jednočlan pa radi jednostavnosti oznaka na desnoj strani izostavljamo vitičaste zagrade te se ponašamo kao da se radi o nekom broju umjesto jednočlanom skupu koji sadrži taj broj.

[5] Općenito bismo tražili $q_i^* = \mathrm{BR}_i(q_{-i}^*)$, ali budući da je skup na desnoj strani jednočlan, znak $\in$ možemo zamijeniti s $=$.

PRIMJER 1.12 (Bertrandov oligopol [Ber83]). Ponovno pretpostavimo da na tržištu postoji n proizvođača nekog proizvoda. Za razliku od modela Cournotovog duopola (Primjer 1.11) u kojem su se proizvođači trebali odlučiti za količinu koju će proizvoditi, promotimo model u kojem se proizvođači trebaju odlučiti po kojoj će cijeni prodavati proizvod, dok će potražnja potom biti diktirana najnižom cijenom. Pretpostavimo dodatno da je cijena proizvodnje jednog proizvoda za svakog proizvođača jednaka nekom $c \in [0,1]$.

Pretpostavimo da su se proizvođači odlučili za cijene $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Drugim riječima, neka se proizvođač i odlučio za cijenu $p_i \in [c,1]$. Neka je N_p skup proizvođača koji su ponudili najmanju cijenu $p^{\min}$. Potražnju modeliramo kao $1 - p^{\min}$, te pretpostavljamo da proizvođači koji su odabrali najnižu cijenu tržište dijele među sobom na jednake dijelove, dok ostali proizvođači ne dobivaju ništa. Dakle, proizvođač i proizvodit će

$$q_i(p) = \begin{cases} \frac{1-p^{\min}}{|N_p|} & \text{ako je } i \in N_p, \\ 0 & \text{ako je } i \notin N_p, \end{cases}$$

pa je pripadna korisnost

$$u_i(p) = \begin{cases} \frac{(p^{\min}-c)(1-p^{\min})}{|N_p|} & \text{ako je } i \in N_p, \\ 0 & \text{ako je } i \notin N_p, \end{cases}$$

Dokazat ćemo da je p^* Nashov ekvilibrij ako i samo ako je $|N_{p^*}| \geqslant 2$ i $p^{*\min} = c$ odnosno ako i samo ako su se barem dva proizvođača odlučila za cijenu c, odnosno da će poslovati bez profita.

Pretpostavimo najprije da je $|N_{p^*}| \geqslant 2$ i $p^{*\min} = c$. U tom slučaju svi proizvođači imaju profit 0, te će takva situacija ostati čak i da se jedan od proizvođača (bilo koji) odluči na promjenu cijene, budući da će minimalna cijena i dalje biti c. Dakle, svaki takav p^* je Nashov ekvilibrij.

ZADATAK 1.2. Dokažite da je p^* jedini Nashov ekvilibrij.

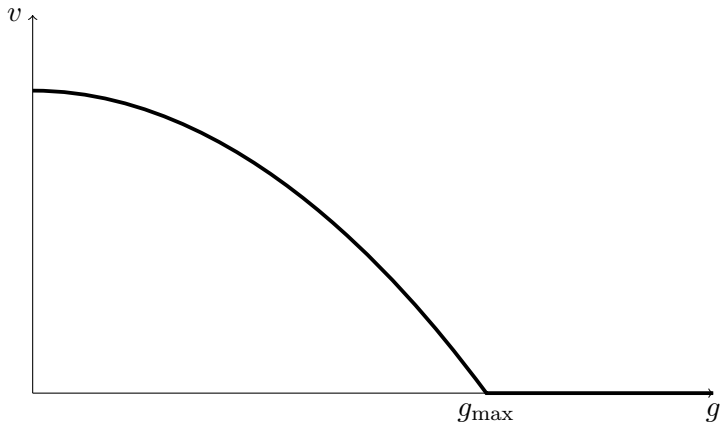
Rješenje. Neka je p^* neki drugi Nashov ekvilibrij. Pretpostavimo da je $|N_{p^*}| = 1$ i $p^{*\min} = c$ te neka je proizvođač i taj koji je odabrao minimalnu cijenu c. U toj situaciji proizvođač i ostvaruje profit 0, ali on taj profit može povećati tako da svoju cijenu poveća za neku jako malu veličinu koja će biti manja od svake od cijena preostalih proizvođača i time osigurati da je on i dalje taj čiji se proizvodi prodaju, ali ovaj put s pozitivnim profitom. Dakle, niti jedan ovakav p^* ne može biti Nashov ekvilibrij. Pretpostavimo konačno da je $p^{*\min} > c$ te neka je proizvođač i jedan od proizvođača koji su odabrali minimalnu cijenu. Ako je $|N_{p^*}| = 1$, tada proizvođač i može povećati svoj profit tako da poveća svoju cijenu za neku minimalnu veličinu, slično kao u prethodnom slučaju. S druge strane, ako je $|N_{p^*}| \geqslant 2$ tada igrač i promjenom cijene s p_i^* na $p_i^* - \epsilon$ umjesto podjele tržišta i dosadašnjeg profita $\frac{(p_i^*-c)(1-p_i^*)}{|N_{p^*}|}$ ima cijelo tržište za sebe te ubire profit $(p_i^* - \epsilon - c)(1 - p_i^* + \epsilon)$. Lako je vidjeti da će za dovoljno mali ϵ potonja situacija za proizvođača i biti bolja. Dakle, niti ovakvi p^* ne mogu biti Nashovi ekvilibriji.

PRIMJER 1.13 (Tragedija zajedničke zemlje / *Tragedy of the commons*). [6] U nekom selu n farmera se bavi kozarstvom i svaki od njih treba odlučiti koliko će koza posjedovati. Svi farmeri svoje koze istovremeno vode na ispašu na obližnji zajednički pašnjak. Pretpostavimo da je trošak kupovine i brige oko jedne koze jednak c, neovisno od ukupnog broja koza koje farmer posjeduje.

Neka je $v(g)$ prihod kojeg farmer ostvaruje od jedne koze ukoliko je ukupno g koza na pašnjaku. Realna pretpostavka je da je v padajuća funkcija, te da je njen pad sve strmiji kako ukupan broj koza raste. Naime, površina pašnjaka je konstantna, tako da veći broj koza znači i veće natjecanje za ograničeni resurs, pa je samim time prihod od jedne dodatne koze manji. Ta razlika u prihodu od jedne

[6] Primjer potječe iz eseja [Llo33] iz 1833. britanskog ekonomista Williama Forstera Lloyda, a popularizirao ga je američki ekolog Garrett Hardin u članku [Har68] iz 1963. Sintagma *tragedy of the commons* u stranoj se literaturi često koristi za situacije u kojima zbog *sebičnih* ekonomskih interesa aktera dolazi do prekomjernog iskorištavanja resursa. Na primjer, posljednjih godina se često spominje u kontekstu pretjerane upotrebe fosilnih goriva.

koze će biti iznimno mala ukoliko pašnjaku s jednom kozom dodamo još jednu kozu – jedna drugoj gotovo da nimalo neće smetati. Međutim, kako dodajemo daljnje koze to se prihod od dodatnih koza sve značajnije smanjuje. U skladu s tim postojat će $g_{\max} = \sup\{g \geqslant 0 \colon v(g) > 0\}$. Dakle, $v(g) = 0$ za sve $g \geqslant g_{\max}$.



Prethodni komentari navode nas da svoja razmatranja suzimo na nenegativne funkcije v koje na netrivijalnom intervalu $[0, g_{\max}\rangle$ imaju svojstvo da su strogo padajuće funkcije i da im je i derivacija v' strogo padajuća. Također, radi jednostavnije analize, nećemo se ograničavati na cjelobrojan broj koza, već će količina koza moći biti proizvoljan nenegativan realan broj.

Svaki farmer i nastoji maksimizirati svoju funkciju korisnosti

$$u_i(g_1, \ldots, g_n) = g_i v(g_1 + \cdots + g_n) - c g_i,$$

pri čemu je g_j broj koza farmera j. U tu svrhu gledamo parcijalnu derivaciju

$$\frac{\partial u_i}{\partial g_i}(g_1, \ldots, g_n) = v(g_1 + \cdots + g_n) + g_i v'(g_1 + \cdots + g_n) - c.$$

Za Nashov ekvilibrij g^* vrijedit će da je g_i^* stacionarna točka svake od funkcija korisnosti $u_i(g_{-i}^*, \cdot)$, odnosno da je

$$v(g_1^* + \cdots + g_n^*) + g_i^* v'(g_1^* + \cdots + g_n^*) - c = 0, \quad \text{za svaki } i = 1, \ldots, n.$$

Zbrajenjem ovih jednakosti za sve i i dijeljenjem s n dobivamo da je

$$v(g^{*\Sigma}) + \frac{g^{*\Sigma}}{n} v'(g^{*\Sigma}) - c = 0, \tag{1.3}$$

pri čemu je $g^{*\Sigma} = g_1^* + \cdots + g_n^*$ ukupan broj koza u Nashovom ekvilibriju.

S druge strane, *društveni* cilj bio bi maksimizirati sveukupnu korisnost

$$g_1 v(g_1 + \cdots + g_n) + \cdots + g_n v(g_1 + \cdots + g_n) - c(g_1 + \cdots + g_n) = g^{\Sigma} v(g^{\Sigma}) - c g^{\Sigma},$$

pri čemu je $g^{\Sigma} = g_1 + \ldots g_n$. Derivacija ove funkcije je

$$v(g^{\Sigma}) + g^{\Sigma} v'(g^{\Sigma}) - c,$$

pa zaključujemo da će za ukupan broj koza $\overline{g}^{\Sigma}$ u strateškom profilu $\overline{g}$ za koji se postiže društveni maksimum, vrijediti

$$v(\overline{g}^{\Sigma}) + \overline{g}^{\Sigma} v'(\overline{g}^{\Sigma}) - c = 0. \tag{1.4}$$

Uočimo da iz jednakosti (1.3) i (1.4) slijedi da je $g^{*\Sigma} > \overline{g}^{\Sigma}$. Naime, kada bi vrijedilo da je $g^{*\Sigma} \leqslant \overline{g}^{\Sigma}$ imali bi

$$0 = v(g^{*\Sigma}) + \frac{g^{*\Sigma}}{n} v'(g^{*\Sigma}) - c \geqslant v(\overline{g}^{\Sigma}) + \frac{g^{*\Sigma}}{n} v'(\overline{g}^{\Sigma}) - c > v(\overline{g}^{\Sigma}) + \overline{g}^{\Sigma} v'(\overline{g}^{\Sigma}) - c = 0,$$

pri čemu prva nejednakost slijedi iz činjenice da su funkcije v i v' padajuće, a druga zbog $v'(\overline{g}^{\Sigma}) < 0$ (jer je v padajuća) i $\overline{g}^{\Sigma} \geqslant g^{*\Sigma}/n$.

Dakle, ukupan broj koza u Nashovom ekvilibriju veći je od broja koza koji bi za društvo bio optimalan. Drugim riječima, ukoliko svaki igrač (u ovom slučaju, farmer) bude odlučivao vodeći se isključivo svojim profitom doći će do pretjeranog iskorištavanja resursa (u ovom slučaju, pašnjaka).

Primjer 1.14 (Konačna arbitražna ponuda [Far80]). Neka tvrtka i sindikat radnika pregovaraju o novim plaćama. Nakon što se nisu uspjeli usuglasiti, složili su se da će konačnu odluku o novim plaćama donijeti neovisni arbitar.

Arbitražni postupak će funkcionirati na način da će svaka od dvije strane arbitru poslati svoj prijedlog plaće, dok će arbitar neovisno od ta dva prijedloga na temelju svojih izračuna odrediti koliko smatra da bi trebala iznositi nova plaća. Nakon toga će pogledati dva prijedloga te se odlučiti za onaj koji je bliži njegovoj procjeni.

Iako niti jedna strana ne zna sa sigurnošću koja će biti arbitrova procjena, na temelju dosadašnjeg iskustva imaju dobar vjerojatnosni model – arbitrovu procjenu modeliraju kao neprekidnu slučajnu varijablu p s funkcijom distribucije F i neprekidnom funkcijom gustoće f.[7] Tvrtka i sindikat žele odabrati svoje prijedloge plaće p_k i p_s na način da očekivanje arbitrove konačne odluke bude što je više u njihovu korist (što manje u slučaju kompanije i što veće u slučaju sindikata).

U skladu s prethodnim, pripadne funkcije korisnosti su[8]

$$\begin{aligned} u_k(p_k,p_s) &= -\min(p_k,p_s)\mathbf{P}\left(p < \frac{p_k+p_s}{2}\right) - \max(p_k,p_s)\mathbf{P}\left(p > \frac{p_k+p_s}{2}\right) \\ &= -\min(p_k,p_s)F\left(\frac{p_k+p_s}{2}\right) - \max(p_k,p_s)\left(1-F\left(\frac{p_k+p_s}{2}\right)\right), \\ u_s(p_k,p_s) &= \min(p_k,p_s)\mathbf{P}\left(p < \frac{p_k+p_s}{2}\right) + \max(p_k,p_s)\mathbf{P}\left(p > \frac{p_k+p_s}{2}\right) \\ &= \min(p_k,p_s)F\left(\frac{p_k+p_s}{2}\right) + \max(p_k,p_s)\left(1-F\left(\frac{p_k+p_s}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Odredimo sada Nashov ekvilibrij (p_k^*, p_s^*). Uočimo najprije da je $p_k^* \leqslant p_s^*$. Doista, kad bi bilo $p_k^* > p_s^*$ imali bi da je $u_k(p_k^*, p_s^*) < u_k(p_s^*, p_s^*)$, odnosno $p_k^* \notin \mathrm{BR}_k(p_s^*)$. Naravno, ovakav zaključak nije nimalo iznenađujuć budući da ne očekujemo da će tvrtka nuditi veće plaće od sindikata.

Stacionarne točke funkcije $u_k(\cdot, p_s^*)$ zadovoljavaju[9]

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial u_k}{\partial p_k}(p_k,p_s^*) &= \frac{\partial u_k}{\partial p_k}\left(-p_k F\left(\frac{p_k+p_s^*}{2}\right) - p_s^*\left(1-F\left(\frac{p_k+p_s^*}{2}\right)\right)\right) \\ &= -F\left(\frac{p_k+p_s^*}{2}\right) + \frac{p_s^*-p_k}{2}F'\left(\frac{p_k+p_s^*}{2}\right), \end{aligned}$$

pa dobivamo nužan uvjet za Nashov ekvilibrij

$$\frac{p_s^*-p_k^*}{2}f\left(\frac{p_k^*+p_s^*}{2}\right) = F\left(\frac{p_k^*+p_s^*}{2}\right).$$

Slično, promatranjem stacionarnih točki funkcije $u_s(p_k^*, \cdot)$ dobivamo i drugi nužan uvjet

$$\frac{p_s^*-p_k^*}{2}f\left(\frac{p_k^*+p_s^*}{2}\right) = 1-F\left(\frac{p_k^*+p_s^*}{2}\right).$$

[7] Prema poznatom rezultatu iz teorije vjerojatnosti znamo da je $F' = f$ ukoliko je f neprekidna.
[8] Ne moramo brinuti o slučaju kada je arbitrova procjena točno na pola između dva prijedloga, budući da je vjerojatnost tog događaja jednaka 0.
[9] Zbog prethodnog komentara možemo pretpostaviti da je $p_k \leqslant p_s^*$.

Budući da su lijeve strane ovih dviju jednadžbi jednake, slijedi da je $F\left(\frac{p_k^*+p_s^*}{2}\right) = \frac{1}{2}$, odnosno da je aritmetička sredina strategija koje čine Nashov ekvilibrij jednaka medijanu arbitrove procjene. Kada to uvrstimo natrag, dobivamo da je

$$p_s^* - p_k^* = \frac{1}{f\left(\frac{p_k^*+p_s^*}{2}\right)}.$$

Napominjemo da su ovo tek nužni uvjeti koje Nashov ekvilibrij mora zadovoljavati – a priori nije jasno da su i dovoljni budući da stacionarne točke ne moraju nužno biti i točke u kojima funkcija postiže maksimum.

Promotrimo sada jedan konkretan slučaj razdiobe – neka je $p \sim N(\mu, \sigma^2)$.[10] Budući da su normalno distribuirane slučajne varijable simetrične oko očekivanja, medijan im je jednak očekivanju pa je

$$\frac{p_k^* + p_s^*}{2} = \mu.$$

Nadalje, imamo da je

$$p_s^* - p_k^* = \frac{1}{f(\mu)} = \sigma\sqrt{2\pi},$$

pa je

$$p_k^* = \mu - \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{2\pi} \quad \text{i} \quad p_s^* = \mu + \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{2\pi}.$$

Ovakav zaključak lako možemo intuitivno opravdati. Stavimo se, na primjer, u perspektivu sindikata. U tom slučaju cilj nam je odabrati što je veću plaću, ali treba pronaći dobar balans – što je prijedlog plaće veći to nam više odgovara, ali je i manja šansa da će biti blizu arbitrove procjene, odnosno da će ga arbitar odabrati. Analogno razmišljanje imat će i tvrtka. Ako je σ malen, tada arbitrova procjena jako malo varira, odnosno s velikom će vjerojatnosti biti blizu medijana što znači da i tvrtka i sindikat moraju svoje prijedloge smjestiti blizu medijana kako bi bili blizu arbitrove procjene. S druge strane, ako je σ velik, veća je šansa da će arbitrova procjena značajno odstupati od medijana pa samim time i tvrtka i sindikat mogu biti donekle ambiciozniji, odnosno ciljati na prijedloge plaće koji im više odgovaraju, odnosno koji više odstupaju od medijana (svaki sa svoje strane medijana).

1.5. Nashov teorem

U ovom odjeljku prelazimo na jedan od glavnih rezultata u ovim bilješkama – teorem o postojanju Nashovog ekvilibrija. Dokazat ćemo ga u dvije etape. Najprije ćemo, uz jednu dodatnu pretpostavku koja jamči da je najbolji odgovor svakog igrača jedinstven i dati dokaz koji počiva samo na Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki. Zatim ćemo tu pretpostavku ukloniti, za što ćemo trebati Kakutanijev teorem – poopćenje Brouwerovog teorema na korespondencije.

Teorem 1.15 (Brouwerov teorem o fiksnoj točki). *Neka je $X \subset \mathbf{R}^n$ neprazan, konveksan i kompaktan skup, te neka je $f\colon X \to X$ neprekidna funkcija. Tada postoji $x^* \in X$ takav da je $f(x^*) = x^*$, tj. f ima fiksnu točku.*

Ovaj teorem nećemo dokazivati; dokaz se može naći u [GDGJFJ10].

Neka je $B \subset \mathbf{R}^m$ konveksan skup. Za funkciju $f\colon B \to \mathbf{R}$ reći ćemo da je **strogo konkavna** ako za sve $x_1, x_2 \in B$, $x_1 \neq x_2$, i svaki $\alpha \in (0,1)$ vrijedi

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

[10] U ovom je slučaju funkcija gustoće jednaka

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Za nas je ključno sljedeće svojstvo: strogo konkavna funkcija na konveksnom skupu ima *najviše jednu* točku maksimuma. Doista, kada bi $y_1 \neq y_2$ obje bile točke maksimuma, iz stroge konkavnosti bi slijedilo $f(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2) > \frac{1}{2}f(y_1) + \frac{1}{2}f(y_2) = \max_B f$, što je nemoguće.

TEOREM 1.16 (Nashov teorem, strogo konkavan slučaj). *Neka je $(\mathcal{A}, u)$ strateška igra s n igrača takva da za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi*

- *A_i je neprazan, konveksan i kompaktan podskup od $\mathbf{R}^{m_i}$,*
- *u_i je neprekidna,*
- *za svaki $x \in \mathcal{A}_{-i}$ funkcija $u_i(x, \cdot)\colon A_i \to \mathbf{R}$ je strogo konkavna.*

Tada $(\mathcal{A}, u)$ ima barem jedan Nashov ekvilibrij.

DOKAZ. Fiksirajmo igrača i i $x \in \mathcal{A}_{-i}$. Funkcija $u_i(x, \cdot)$ je neprekidna na kompaktnom skupu A_i, pa postiže maksimum, a zbog stroge konkavnosti točka maksimuma je jedinstvena. Drugim riječima, skup $\mathrm{BR}_i(x)$ je jednočlan; njegov jedini element označit ćemo s $b_i(x)$. Time je dobro definirana funkcija $b_i\colon \mathcal{A}_{-i} \to A_i$.

Tvrdimo da je b_i neprekidna. Neka je $(x_k) \subset \mathcal{A}_{-i}$ niz koji konvergira prema x i označimo $y_k = b_i(x_k)$. Zbog kompaktnosti skupa A_i dovoljno je pokazati da svaki konvergentan podniz niza (y_k) ima limes $b_i(x)$. (Naime, kada niz (y_k) ne bi konvergirao prema $b_i(x)$, postojali bi $\varepsilon > 0$ i podniz koji ostaje izvan kugle oko $b_i(x)$ radijusa ε; zbog kompaktnosti taj podniz ima konvergentan podniz, a njegov limes očito nije $b_i(x)$.) Neka je, dakle, (y_{k_j}) konvergentan podniz s limesom $y \in A_i$. Za svaki j i svaki $z \in A_i$ zbog $y_{k_j} \in \mathrm{BR}_i(x_{k_j})$ vrijedi $u_i(x_{k_j}, y_{k_j}) \geqslant u_i(x_{k_j}, z)$. Puštanjem $j \to \infty$ i korištenjem neprekidnosti funkcije u_i dobivamo $u_i(x, y) \geqslant u_i(x, z)$ za svaki $z \in A_i$, odnosno $y \in \mathrm{BR}_i(x) = \{b_i(x)\}$. Dakle $y = b_i(x)$, što smo i tvrdili.

Definirajmo sada $b\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ s

$$b(a) = \big(b_1(a_{-1}), \ldots, b_n(a_{-n})\big).$$

Preslikavanje $a \mapsto a_{-i}$ je neprekidno (radi se o projekciji), pa je svaka komponenta od b, a time i sama funkcija b, neprekidna. Skup $\mathcal{A} = A_1 \times \cdots \times A_n \subset \mathbf{R}^{m_1+\cdots+m_n}$ je neprazan, konveksan i kompaktan kao produkt takvih skupova. Prema Brouwerovom teoremu postoji $a^* \in \mathcal{A}$ takav da je $b(a^*) = a^*$, odnosno $a_i^* = b_i(a_{-i}^*) \in \mathrm{BR}_i(a_{-i}^*)$ za sve i. To upravo znači da je a^* Nashov ekvilibrij. □

Napomena. Pretpostavka stroge konkavnosti isključuje najvažniji primjer – mješovita proširenja konačnih igara, o kojima će biti riječi u nastavku kolegija. Ondje je skup strategija igrača simpleks vjerojatnosnih distribucija na konačnom skupu čistih strategija, a očekivana isplata je *afina* funkcija vlastite mješovite strategije: ona jest konkavna, ali nikada strogo konkavna (osim kada igrač ima samo jednu čistu strategiju). Skup najboljih odgovora je tada strana simpleksa (konveksna ljuska čistih strategija koje postižu maksimalnu očekivanu isplatu) i u pravilu nije jednočlan, pa funkcija b_i nije ni definirana. Sljedeći zadatak pokazuje da se ta poteškoća može zaobići jednostavnim trikom regularizacije, kojim Brouwerov teorem pokriva sve igre s konkavnim (ne nužno strogo konkavnim) funkcijama isplate. Za općenitiji slučaj *kvazi*-konkavnih funkcija isplate, kojim se bavimo u nastavku, taj trik više ne radi (zbroj kvazi-konkavne i strogo konkavne funkcije ne mora biti ni kvazi-konkavan) i ondje je zaista potrebno poopćenje Brouwerovog teorema na korespondencije – Kakutanijev teorem.

ZADATAK 1.3. Neka je $(\mathcal{A}, u)$ strateška igra s n igrača takva da za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi: A_i je neprazan, konveksan i kompaktan podskup od $\mathbf{R}^{m_i}$, u_i je neprekidna, i za svaki $x \in \mathcal{A}_{-i}$ funkcija $u_i(x, \cdot)$ je konkavna. Koristeći Teorem 1.16 dokažite da $(\mathcal{A}, u)$ ima Nashov ekvilibrij. *Uputa:* za $\varepsilon > 0$ promotrite igru $(\mathcal{A}, u^\varepsilon)$ s funkcijama isplate $u_i^\varepsilon(x, y) = u_i(x, y) - \varepsilon\|y\|^2$.

Prijeđimo sada na opći slučaj. Da bismo uklonili pretpostavku (stroge) konkavnosti, moramo raditi s korespondencijama najboljeg odgovora, pa nam prvo treba odgovarajući pojam neprekidnosti za korespondencije.

Neka su $X \subset \mathbf{R}^n$ i $Y \subset \mathbf{R}^m$. Za korespondenciju $F\colon X \to Y$ reći ćemo da je s **nepraznim**, **zatvorenim** ili **konveksnim vrijednostima** ako je za svaki $x \in X$, $F(x)$ redom neprazan, zatvoren ili konveksan podskup od Y. Za F ćemo reći da je **odozgo hemineprekidna** u točki $x \in X$ ako za svaki niz $(x_k) \subset X$ koji konvergira prema x i svaki otvoreni skup $V \subset Y$ takav da je $F(x) \subset V$ postoji k_0 takav da je $F(x_k) \subset V$ za sve $k \geqslant k_0$. Za F kažemo da je odozgo hemineprekidna ako je odozgo hemineprekidna u svakoj točki $x \in X$.

Zadatak 1.4. Dokažite da, ako je korespondencija F funkcija $X \to Y$ (odnosno, ako svakom elementu iz X pridružuje jednočlan podskup od Y) tada su pojmovi odozgo hemineprekidnosti i neprekidnosti jednaki.

Teorem 1.17 (Kakutanijev teorem o fiksnoj točki). *Neka je $X \subset \mathbf{R}^n$ neprazan, konveksan i kompaktan skup, te neka je $F\colon X \to X$ odozgo hemineprekidna korespondencija s nepraznim, zatvorenim i konveksnim vrijednostima. Tada postoji $x^* \in X$ takav da je $x^* \in F(x^*)$, tj. F ima fiksnu točku.*

Dokaz ovog teorema nije jednostavan, pa budući da sam po sebi nema veze s teorijom igara, mi ga nećemo iznositi. Zainteresiranog čitatelja upućujemo na [**GDGJFJ10**]. Uočimo da je, zbog Zadatka 1.4, Brouwerov teorem specijalan slučaj Kakutanijevog.

Neka je $B \subset \mathbf{R}^m$. Za funkciju $f\colon B \to \mathbf{R}$ reći ćemo da je kvazi-konkavna ako je skup $\{x \in B\colon f(x) \geqslant r\}$ konveksan za svaki $r \in \mathbf{R}$ ili, ekvivalentno, ako je za sve $x_1, x_2 \in B$ i svaki $\alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \min\{f(x_1), f(x_2)\}$. Lako je za vidjeti da je svaka konkavna funkcija ujedno i kvazi-konkavna. Međutim, postoje i mnoge druge funkcije koje su kvazi-konkavne. Na primjer, iz definicije je odmah vidljivo da je svaka monotona funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kvazi-konkavna. Dodatno, kvazi-konkavna je svaka funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ za koju postoji $x_0 \in \mathbf{R}$ tako da je f rastuća na $(-\infty, x_0]$ i padajuća na $[x_0, \infty)$. Naime, tada su svi skupovi $\{f \geqslant r\}$ intervali. Takve su, recimo, $x \mapsto e^{-x^2}$ i $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Nijedna od njih nije konkavna jer im je druga derivacija pozitivna za velike $|x|$.

Teorem 1.18 (Nashov 'apstraktan' teorem). *Neka je $(\mathcal{A}, u)$ strateška igra s n igrača takva da za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi*

- *A_i je konveksan i kompaktan podskup od $\mathbf{R}^{m_i}$,*
- *u_i je neprekidna,*
- *Za svaki $x \in \mathcal{A}_{-i}$ funkcija $u_i(x, \cdot)\colon A_i \to \mathbf{R}$ je kvazi-konkavna.*

Tada $(\mathcal{A}, u)$ ima barem jedan Nashov ekvilibrij.

Dokaz. Ideja je da pokažemo da je korespondencija najboljeg odgovora BR odozgo hemineprekidna s nepraznim, zatvorenim i konveksnim vrijednostima – drugim riječima, da zadovoljava pretpostavke Kakutanijevog teorema o fiksnoj točki. Taj će teorem jamčiti postojanje fiksne točke $a \in \mathcal{A}$, a iz same definicije korespondencije BR jasno je da je svaka njena fiksna točka Nashov ekvilibrij.

Prijeđimo sada na dokazivanje potrebnih svojstava korespondencije BR. Uočimo da sva ta svojstva slijede direktno ukoliko znamo da ih posjeduju i sve korespondencije BR_i (v. Zadatak 1.5). Fiksirajmo zato nekog igrača i i $x \in \mathcal{A}_{-i}$.

Budući da je u_i neprekidna, slijedi da je neprekidna i funkcija $u_i(x, \cdot)$. Njena je domena kompaktan skup, a poznato je da svaka neprekidna funkcija na kompaktnom skupu postiže maksimum. Zaključujemo da je $\mathrm{BR}_i(x)$ neprazan skup.

Nadalje, uočimo da je

$$\mathrm{BR}_i(x) = \{y \in A_i\colon u_i(x,y) \geqslant \max_{y' \in A_i} u_i(x,y')\},$$

a skup na desnoj strani je konveksan zbog pretpostavke da je funkcija $u_i(x,\cdot)$ kvazi-konkavna.

Neka je $(y_k) \subset \mathrm{BR}_i(x)$ niz s limesom y. Tada je $u_i(x,y_k) = \max_{y' \in A_i} u_i(x,y')$, pa puštanjem limesa i korištenjem neprekidnosti dobivamo da je $u_i(x,y) = \max_{y' \in A_i} u_i(x,y')$, odnosno $y \in \mathrm{BR}_i(x)$. Zaključujemo da $\mathrm{BR}_i(x)$ sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova, odnosno da je zatvoren.

Pretpostavimo sada da korespondencija BR_i *nije* odozgo hemineprekidna, odnosno da postoji $x \in \mathcal{A}_{-i}$, neki niz $(x_k) \subset \mathcal{A}_{-i}$ koji konvergira prema x, te neki $V \subset A_i$ otvoreni skup koji sadrži $\mathrm{BR}_i(x)$ takav da je $\mathrm{BR}_i(x_k) \not\subset V$ za beskonačno mnogo indeksa k. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to slučaj za sve indekse k (u suprotnom samo prijeđemo na podniz). Za svaki k tada postoji $y_k \in \mathrm{BR}_i(x_k) \setminus V$. Budući da je skup A_i kompaktan, bez smanjenja općenitosti (eventualnim ponovnim prelaskom na podniz) možemo pretpostaviti da je niz (y_k) konvergentan i da mu je limes y unutar A_i (kompaktnost jamči da to svojstvo ima neki njegov podniz). Budući da je V otvoren, slijedi da je $A_i \setminus V$ zatvoren pa zbog $(y_k) \subset A_i \setminus V$ zaključujemo da je $y \in A_i \setminus V$, odnosno $y \notin \mathrm{BR}_i(x)$.

S druge strane, za svaki k i svaki $z \in A_i$ zbog $y_k \in \mathrm{BR}_i(x_k)$ znamo da je $u_i(x_k,y_k) \geqslant u_i(x_k,z)$. Ako pustimo limes $k \to \infty$, te iskoristimo neprekidnost funkcije u_i dobivamo da je $u_i(x,y) \geqslant u_i(x,z)$, odakle slijedi da je $y \in \mathrm{BR}_i(x)$, što je kontradikcija. □

Zadatak 1.5. Dokažite da ukoliko BR_i zadovoljava uvjete Kakutanijevog teorema za sve $i \in [n]$, tada i BR zadovoljava iste uvjete.

1.6. Mješovita proširenja

Do sada smo pretpostavljali da svaki igrač odabire jednu, točno određenu strategiju iz svog skupa A_i. Međutim, igrač možda želi nasumično birati neku od mogućih strategija prema nekoj unaprijed odabranoj vjerojatnosnoj distribuciji na A_i. Drugim riječima, umjesto elementa skupa A_i igrač bira vjerojatnosnu distribuciju na A_i – svoju *mješovitu strategiju* – a konkretnu strategiju potom "izvlači" u skladu s tom distribucijom, neovisno o ostalim igračima.

Ishod igre sada je slučajan: ako igrači biraju neovisno, strateški profil $a = (a_1,\dots,a_n)$ realizira se s vjerojatnošću $s_1(a_1)\cdots s_n(a_n)$, gdje je s_i distribucija koju je odabrao igrač i. Prirodna mjera uspjeha igrača i tada je *očekivana* korisnost, odnosno zbroj vrijednosti $u_i(a)$ po svim profilima $a \in \mathcal{A}$, ponderiran tim vjerojatnostima. Tako od polazne igre dobivamo novu stratešku igru u kojoj su strategije vjerojatnosne distribucije, a korisnosti očekivanja polaznih korisnosti. Zapišimo to precizno; pritom pretpostavljamo da je polazna igra konačna. Za konačan skup A s $[0,1]^A$ označavamo skup svih funkcija $A \to [0,1]$; poistovjetimo li funkciju s $|A|$-torkom njezinih vrijednosti, taj skup možemo shvatiti kao $[0,1]^{|A|} \subset \mathbf{R}^{|A|}$. Vjerojatnosne distribucije na A upravo su one funkcije $x \in [0,1]^A$ za koje je $\sum_{a\in A} x(a) = 1$.

Definicija 1.19. **Mješovito proširenje** konačne strateške igre $(\mathcal{A},u)$ s n igrača je strateška igra $(\mathcal{S},u)$ s n igrača, pri čemu je za svaki $i = 1,\dots,n$:

- $S_i = \Delta A_i$ **skup mješovitih strategija igrača** i, pri čemu je
$$\Delta A_i = \Big\{x \in [0,1]^{A_i} \colon \sum_{a_i \in A_i} x(a_i) = 1\Big\}.$$
Kao i inače, $\mathcal{S} = S_1 \times \cdots \times S_n$. Za proizvoljni **mješoviti strateški profil** $s \in \mathcal{S}$ i strateški profil $a \in \mathcal{A}$ neka je $s(a) = s_1(a_1)\cdots s_n(a_n)$.
- $u_i \colon \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ **proširena funkcija korisnosti igrača** i definirana je s
$$u_i(s) = \sum_{a\in\mathcal{A}} u_i(a)s(a).$$
Tada je $u = (u_1,\dots,u_n)$ **proširena funkcija korisnosti**.

U skladu s uvodnom motivacijom, mješovitu strategiju $s_i \in S_i$ doživljavamo kao vjerojatnosnu distribuciju prema kojoj igrač i bira strategiju iz A_i. Odluči li se igrač, primjerice, strategiju birati uniformno, njegova mješovita strategija zadovoljava $s_i(a_i) = 1/|A_i|$ za sve $a_i \in A_i$. S druge strane, ako se igrač odluči za neku fiksnu strategiju $a_i \in A_i$, njegova je mješovita strategija $e_{a_i} \in S_i$ zadana s

$$e_{a_i}(a_i') = \begin{cases} 1, & \text{za } a_i' = a_i, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Strategije e_{a_i} nazivat ćemo **čistim strategijama**. Dakle, čiste strategije nisu ništa drugo nego originalne strategije (iz skupa A_i) shvaćene kao podvrsta mješovitih strategija. Uz tu identifikaciju možemo čak pisati $A_i \subset S_i$, pa onda i $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$. Nadalje, budući da igrači svoje strategije izvlače neovisno jedan o drugome, vrijednost

$$s(a) = s_1(a_1) \cdots s_n(a_n)$$

upravo je vjerojatnost da će se realizirati strateški profil a, a $u_i(s)$ je očekivana korisnost igrača i kada igrači igraju mješoviti strateški profil s. Posebno, za čisti profil $s = (e_{a_1}, \ldots, e_{a_n})$ sva je vjerojatnost koncentrirana u a, pa je $u_i(s) = u_i(a)$: na $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ proširena se funkcija korisnosti podudara s originalnom, što opravdava uporabu iste oznake u_i za obje.

Primijetimo i sljedeće. U prostoru $\mathbf{R}^{|A_i|}$ promotrimo $|A_i|$ točaka kojima su sve koordinate jednake 0, osim jedne koja je jednaka 1. Skup S_i tada možemo reprezentirati kao konveksnu ljusku tih točaka. Skupovi S_i su, dakle, konveksni i kompaktni podskupovi od $\mathbf{R}^{|A_i|}$, a funkcije u_i su polinomi, dakle neprekidne, i afine u vlastitoj varijabli s_i – upravo onakve kakve zahtijeva Nashov teorem (Teorem 1.18).

Za stratešku igru $(\mathcal{A}, u)$ kažemo da je **konačna** ako je skup A_i konačan za sve igrače i. Sljedeći teorem slijedi direktno iz Nashovog apstraktnog teorema (Teorem 1.18).

Teorem 1.20 (Nashov teorem o mješovitom proširenju). *Mješovito proširenje $(\mathcal{S}, u)$ konačne strateške igre $(\mathcal{A}, u)$ ima barem jedan Nashov ekvilibrij.*

Dokaz. Lako je za vidjeti da je skup mješovitih strategija svakog igrača konveksan i kompaktan. Neka je $(s^{(k)}) \subset \mathcal{S}$ niz koji konvergira prema $s \in \mathcal{S}$ (po točkama). Tada je

$$\lim_{k\to\infty} u_i(s^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{a\in\mathcal{A}} u_i(a)s^{(k)}(a) = \sum_{a\in\mathcal{A}} u_i(a)(\lim_{k\to\infty} s^{(k)}(a)) = \sum_{a\in\mathcal{A}} u_i(a)s(a) = u_i(s),$$

pri čemu druga jednakost vrijedi jer je suma konačna. Zaključujemo da je u_i neprekidna. Pokažimo još da je za svaki $x \in S_{-i}$ funkcija $u_i(x, \cdot)\colon S_i \to \mathbf{R}$ kvazi-konkavna.

Neka su $y_1, y_2 \in S_i$ takvi da je $u_i(x, y_1) \geqslant r$ i $u_i(x, y_2) \geqslant r$ za neki $r \in \mathbf{R}$. Tada za proizvoljni $\alpha \in [0, 1]$ imamo mješoviti strateški profil $(x, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \in \mathcal{S}$ takav da za svaki strateški profil $a \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$(x, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)(a) = (\alpha y_1(a_i) + (1-\alpha)y_2(a_i)) \prod_{j\neq i} x_j(a_j).$$

Zato je

$$\begin{aligned} u_i(x, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} u_i(a)(\alpha y_1(a_i) + (1-\alpha)y_2(a_i)) \prod_{j\neq i} x_j(a_j) \\ &= \alpha \sum_{a\in\mathcal{A}} u_i(a)y_1(a_i) \prod_{j\neq i} x_j(a_j) + (1-\alpha) \sum_{a\in\mathcal{A}} u_i(a)y_2(a_i) \prod_{j\neq i} x_j(a_j) \\ &= \alpha u_i(x, y_1) + (1-\alpha)u_i(x, y_2) \\ &\geqslant r, \end{aligned}$$

odakle slijedi kvazi-konkavnost. Željeni zaključak slijedi iz Teorema 1.18. □

Sada ćemo pokazati da se čvrsta veza između originalne igre i njenog mješovitog proširenja prenosi i na traženje najboljih odgovora i Nashovih ekvilibrija.

DEFINICIJA 1.21. Neka je $(\mathcal{A}, u)$ konačna igra, a $(\mathcal{S}, u)$ njeno mješovito proširenje.

- **Nosač** mješovite strategije $s_i \in S_i$ je skup $\operatorname{supp}(s_i) = \{a_i \in A_i \colon s_i(a_i) > 0\}$.
- **Korespondencija čistog najboljeg odgovora igrača** i je korespondencija $\mathrm{PBR}_i \colon S_{-i} \to A_i$ s pravilom pridruživanja

$$\mathrm{PBR}_i(s_{-i}) = \{a_i \in A_i \colon u_i(s_{-i}, a_i) = \max_{a_i' \in A_i} u_i(s_{-i}, a_i')\}.$$

PROPOZICIJA 1.22. *Neka je $(\mathcal{A}, u)$ konačna igra, $(\mathcal{S}, u)$ njeno mješovito proširenje, te neka je $s \in \mathcal{S}$ neki mješoviti strateški profil. Tada je $s_i \in \mathrm{BR}_i(s_{-i})$ ako i samo ako je $\operatorname{supp}(s_i) \subset \mathrm{PBR}_i(s_{-i})$.*

DOKAZ. Neka je $M = \max_{a_i \in A_i} u_i(s_{-i}, a_i)$. Uočimo najprije da je

$$\begin{aligned} u_i(s) &= \sum_{a_i \in A_i} \sum_{a_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}} u_i(a_{-i}, a_i) s(a_{-i}, a_i) = \sum_{a_i \in A_i} \left(\sum_{a_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}} u_i(a_{-i}, a_i) \prod_{j \neq i} s_j(a_j) \right) s_i(a_i) \\ &= \sum_{a_i \in A_i} u_i(s_{-i}, a_i) s_i(a_i) \leqslant \max_{a_i \in A_i} M, \end{aligned}$$

jer je $u_i(s_{-i}, a_i) \leqslant M$ za svaki $a_i \in A_i$ U posljednjoj nejednakosti znak jednakosti će vrijediti ako i samo ako je $s_i(a_i) = 0$ za sve a_i za koje je $u_i(s_{-i}, a_i) < M$, odnosno za sve $a_i \notin \mathrm{PBR}_i(s_{-i})$. □

1.7. Bimatrične igre

DEFINICIJA 1.23. **Bimatrična igra** je mješovito proširenje konačne igre s dva igrača.

Neka je $(\mathcal{A}, u)$ neka konačna igra s dva igrača. Neka su $\mathbf{U}^{(1)} = (u_{ij}^{(1)})$ i $\mathbf{U}^{(2)} = (u_{ij}^{(2)})$ matrice dimenzija $|A_1| \times |A_2|$ zadane s

$$\mathbf{U}^{(1)} = (u_1(i,j))_{i \in A_1, j \in A_2} \quad \text{i} \quad \mathbf{U}^{(2)} = (u_2(i,j))_{i \in A_1, j \in A_2}.$$

Budući da ćemo kod bimatričnih igara često raditi s matricama (npr. množiti ih), radi jednostavnije notacije strategije ćemo najčešće označavati na način da je $A_1 = \{1, \ldots, |A_1|\}$ i $A_2 = \{1, \ldots, |A_2|\}$. Tako će npr. i-ti redak u matrici upravo odgovarati strategiji i prvog igrača.

Također, mješovite strategije $x \in S_1$ i $y \in S_2$ često ćemo doživljavati kao vektor-retke. Uz takvo shvaćanje, za proširene funkcije korisnosti imamo

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{i \in A_1, j \in A_2} u_1(i,j) x_i y_j = x \mathbf{U}^{(1)} y^T, \\ u_2(x, y) &= \sum_{i \in A_1, j \in A_2} u_2(i,j) x_i y_j = x \mathbf{U}^{(2)} y^T. \end{aligned}$$

Dakle, bimatrična igra određena je matricama $\mathbf{U}^{(1)}$ i $\mathbf{U}^{(2)}$.

Nadalje, uočimo da je $x u_{\cdot j}^{(1)}$ dobitak prvog igrača[11] ukoliko se on odluči za mješovitu strategiju x, a drugi igrač za čistu strategiju j. Slično, $u_{i\cdot}^{(2)} y^T$ je dobitak drugog igrača ukoliko se on odluči za mješovitu strategiju y, a prvi igrač za čistu strategiju i.

Pokažimo sada na jednom poznatom primjeru kako možemo odrediti Nashove ekvilibrije bimatrične igre dimenzije 2×2. Uočimo da tada mješovite strategije svakog igrača možemo identificirati sa segmentom $[0, 1]$ na način da $x \in [0, 1]$ označava mješovitu strategiju $(x, 1 - x)$.

PRIMJER 1.24 (Bitka spolova). Muž i žena odlučuju kako će provesti večer – muž bi najradije otišao u šetnju, dok bi žena najradije otišla u kino. Ipak, i jedno i drugo će radije provesti večer uz

[11] Za matricu $\mathbf{M}$, s $m_{\cdot j}$ i $m_{i\cdot}$ označavat ćemo redom njen j-ti stupac i i-ti redak.

manje interesantnu opciju nego sami otići na svoju prioritetnu opciju. Sljedeća bimatrica prikazuje njihove funkcije korisnosti

$$\begin{array}{c} \\ \text{šetnja} \\ \text{kino} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{šetnja} & \text{kino} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ -1,-1 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Odredimo sada korespondenciju BR_1, tj. za proizvoljni $y \in S_2$ (možemo identificirati $S_2 = [0,1]$) odredimo sve $x \in S_1 = [0,1]$ takve da je $x \in \mathrm{BR}_1(y)$. U tu svrhu računamo

$$x\mathbf{U}^{(1)}y^T = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = x(4y-1) + 1 - 2y.$$

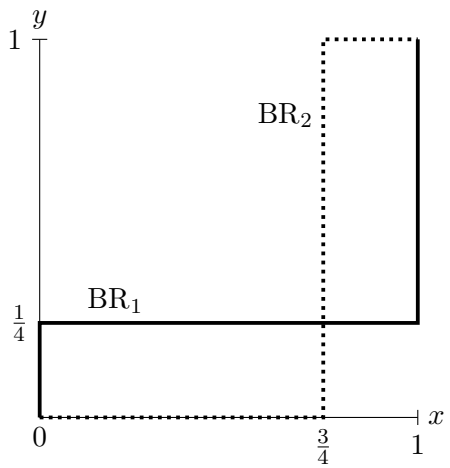
Za $y < \frac{1}{4}$ ova je funkcija strogo padajuća u x pa maksimum postiže za $x = 0$. Za $y = \frac{1}{4}$ funkcija je konstantna, dok je za $y > \frac{1}{4}$ strogo rastuća u x pa se maksimum postiže za $x = 1$. Dakle,

$$\mathrm{BR}_1(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{za } y \in [0, \frac{1}{4}\rangle, \\ [0,1] & \text{za } y = \frac{1}{4}, \\ \{1\} & \text{za } y \in \langle \frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

Slično dobivamo da je i

$$\mathrm{BR}_2(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{za } x \in [0, \frac{3}{4}\rangle, \\ [0,1] & \text{za } x = \frac{3}{4}, \\ \{1\} & \text{za } x \in \langle \frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Ako nacrtamo grafove ovih korespondencija[12], Nashovi ekvilibriji bit će upravo točke njihovih presjeka (što slijedi iz definicije najboljeg odgovora i definicije grafa).



Iščitavamo tri Nashova ekvilibrija – $((0,1),(0,1))$, $((\frac{3}{4},\frac{1}{4}),(\frac{1}{4},\frac{3}{4}))$ i $((1,0),(1,0))$.

Napomena. Alternativno, strategije 2. igrača se mogu parametrizirati tako da $y \in [0,1]$ odgovara strategiji $(1-y, y) \in S_2$. Na taj način, $\mathrm{BR}_1(x)$ i $\mathrm{BR}_2(y)$ 'izgledaju isto', pa ima malo manje računa.

ZADATAK. Riješite Primjer 1.24 izravno iz definicije Nashovog ekvilibrija, koristeći matematičku analizu. Ne zaboravite provjeriti rubove intervala!

[12] Graf korespondencije $f\colon X \to Y$ je skup $\{(x,y)\colon y \in f(x)\} \subset X \times Y$

ZADATAK. Odredite korespondencije najboljih odgovora prvog i drugog igrača, te Nashove ekvilibrije u bimatričnoj igri zadanoj bimatricom

$$\begin{pmatrix} -2,3 & 1,-1 \\ 1,0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

1.8. Igre sa sumom nula s dva igrača

U mnogim je igrama ulog novac koji na kraju igre mijenja vlasnika. Kako se novac ne stvara, dobitak jednih točno je jednak gubitku drugih pa označimo li s $u_i(a)$ iznos koji igrač i primi kad se odigra strateški profil a (negativan ako je igrač na kraju platio), tada je $u_1(a)+\cdots+u_n(a) = 0$ za svaki $a \in \mathcal{A}$. Primjere igara sa sumom nula već smo vidjeli u Primjeru 1.1 par–nepar te u Primjeru 1.10 sa sladoledarima. Osim toga, još jedan poznati primjer takve igre je poker.

DEFINICIJA 1.25. **Igra sa sumom nula s n igrača** je strateška igra $(\mathcal{A}, u)$ takva da je $u_1 + \cdots + u_n = 0$, tj. za svaki strateški profil $a \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$u_1(a) + \cdots + u_n(a) = 0.$$

U ovom ćemo se dijelu posebno pozabaviti igrama sa sumom nula u kojima sudjeluju samo dva igrača. Tada je $u_2 = -u_1$, pa je igra potpuno opisana uređenom trojkom (A_1, A_2, u_1), a broj $u_1(a_1, a_2)$ ima jednostavno značenje: to je iznos koji drugi igrač plaća prvome kad odigraju (a_1, a_2) (negativan iznos znači da prvi igrač plaća drugome). Dakle, prvi igrač nastoji funkciju u_1 učiniti što većom, a drugi što manjom. Nadalje, pretpostavljat ćemo da je funkcija u_1 ograničena, čime osiguravamo da su infimumi i supremumi koje ćemo uskoro uvesti realni brojevi.

PRIMJER 1.26 (**Pogodi ruku**). Igru igraju *skrivač* i *birač* (u literaturi na engleskom *hider* i *chooser*). Skrivač ima dva zlatnika. Iza leđa ih rasporedi na jedan od dva načina: ili jedan zlatnik stavi u lijevu ruku, a drugi ostavi u džepu, ili oba stavi u desnu ruku. Birač zatim pokaže na jednu ruku i dobiva sve što je u njoj – dva zlatnika, jedan ili ništa. Birač je prvi igrač sa skupom strategija $A_1 = \{D, L\}$ (pokazuje na desnu ili lijevu ruku), skrivač je drugi igrač sa skupom strategija $A_2 = \{D2, L1\}$ (dva zlatnika u desnu, odnosno jedan u lijevu ruku), a $u_1(a_1, a_2)$ je broj zlatnika koje skrivač isplati biraču:

$$\begin{array}{c} \\ D \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} D2 & L1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Prirodno pitanje za svakog od igrača je: koliko si mogu *zajamčiti*, što god protivnik odigrao? Pokaže li birač na desnu ruku, u najgorem slučaju dobiva 0; pokaže li na lijevu, u najgorem slučaju također 0. Birač si, dakle, ne može zajamčiti ništa. Skrivač razmišlja isto, ali o gubitku: stavi li dva zlatnika u desnu ruku, u najgorem slučaju gubi 2, a stavi li jedan u lijevu, u najgorem slučaju gubi 1. Dobrim odabirom skrivač si može zajamčiti da neće izgubiti više od 1. Između onoga što birač može osigurati (0) i onoga što skrivač može osigurati (1) ostaje praznina; vratit ćemo joj se.

Upravo ta dva pitanja – koliko si prvi igrač može zajamčiti da će dobiti i koliko si drugi može zajamčiti da neće izgubiti – vode na sljedeće definicije.

DEFINICIJA 1.27. Neka je (A_1, A_2, u_1) igra sa sumom nula s dva igrača.

- Za $a_1 \in A_1$ neka je
$$\underline{\Lambda}(a_1) = \inf_{a_2 \in A_2} u_1(a_1, a_2)$$
najmanji dobitak prvog igrača u slučaju da odabere strategiju a_1, odnosno dobitak koji si odabirom strategije a_1 jamči. **Donja vrijednost** igre je najveći dobitak koji si prvi igrač

uopće može zajamčiti:

$$\underline{\lambda} = \sup_{a_1 \in A_1} \underline{\Lambda}(a_1).$$

- Za $a_2 \in A_2$ neka je
$$\overline{\Lambda}(a_2) = \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2)$$
najveći gubitak drugog igrača u slučaju da odabere strategiju a_2; odabirom strategije a_2 drugi si igrač, dakle, jamči da neće izgubiti više od $\overline{\Lambda}(a_2)$. **Gornja vrijednost** igre je najmanji gubitak koji si drugi igrač može zajamčiti da neće premašiti:
$$\overline{\lambda} = \inf_{a_2 \in A_2} \overline{\Lambda}(a_2).$$

Zapisane bez posrednika, te su vrijednosti

$$\underline{\lambda} = \sup_{a_1 \in A_1} \inf_{a_2 \in A_2} u_1(a_1, a_2) \qquad \text{i} \qquad \overline{\lambda} = \inf_{a_2 \in A_2} \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2),$$

pa se u literaturi nazivaju i *maximin*, odnosno *minimax* vrijednost igre. U igri *Pogodi ruku* već smo izračunali $\underline{\Lambda}(D) = \underline{\Lambda}(L) = 0$ te $\overline{\Lambda}(D2) = 2$ i $\overline{\Lambda}(L1) = 1$, pa je $\underline{\lambda} = 0$ i $\overline{\lambda} = 1$. Ondje je donja vrijednost bila manja od gornje; to nije slučajnost.

Lema 1.28. *U svakoj igri sa sumom nula s dva igrača vrijedi* $\underline{\lambda} \leqslant \overline{\lambda}$.

Dokaz. Za sve $a_1 \in A_1$ i $a_2 \in A_2$ je

$$\underline{\Lambda}(a_1) \leqslant u_1(a_1, a_2) \leqslant \overline{\Lambda}(a_2),$$

pa tvrdnja slijedi uzimanjem supremuma po $a_1 \in A_1$ i infimuma po $a_2 \in A_2$. □

Lema kaže da prvi igrač ne može sebi zajamčiti više nego što drugi može zajamčiti da neće izgubiti, što je i očekivano: u suprotnom bi obojica bila sigurna u nešto što se ne može istodobno dogoditi. Razlika $\overline{\lambda} - \underline{\lambda}$ dio je uloga koji nijedan igrač ne može osigurati vlastitim izborom.

Zamislimo da prvi igrač mora drugome platiti iznos c za pravo igranja. Za $c \leqslant \underline{\lambda}$ prvi igrač ne riskira: strategijom koja postiže $\underline{\lambda}$ (ili joj je po volji blizu) osigurava si dobitak koji nije manji od uplaćenog, što god drugi igrač odigrao, a za $c < \underline{\lambda}$ i strogo pozitivan dobitak – u očekivanju, ako je u_1 očekivana korisnost, što znači da će u dugom nizu partija biti u plusu. Drugi igrač pak ne riskira za $c \geqslant \overline{\lambda}$, jer si može osigurati da neće isplatiti više od $\overline{\lambda}$. Cijena prihvatljiva objema stranama postoji, dakle, samo ako je $\underline{\lambda} = \overline{\lambda}$, i tada je jednaka vrijednosti igre V: to je *pravedna cijena* igre, pri kojoj nijedan igrač ne može unaprijed računati na dobitak.

Od posebnog će nam interesa biti igre u kojima te praznine nema.

Definicija 1.29. Neka je (A_1, A_2, u_1) igra sa sumom nula s dva igrača. Za tu igru kažemo da je **strogo određena** ili da ima vrijednost ukoliko se njena donja i gornja vrijednost podudaraju. U tom ćemo slučaju broj $V := \overline{\lambda} = \underline{\lambda}$ nazivati **vrijednost** igre.

Definicija 1.30. Neka je (A_1, A_2, u_1) strogo određena igra s vrijednosti V. Za strategiju $a_1 \in A_1$ reći ćemo da je **optimalna strategija prvog igrača** ukoliko je $\underline{\Lambda}(a_1) = V$. Analogno, za strategiju $a_2 \in A_2$ reći ćemo da je **optimalna strategija drugog igrača** ukoliko je $\overline{\Lambda}(a_2) = V$.

Uočimo da u strogo određenoj igri optimalne strategije ne moraju postojati, ali postoje čim se supremum u definiciji $\underline{\lambda}$ i infimum u definiciji $\overline{\lambda}$ doista postižu, što je, na primjer, uvijek slučaj kad su A_1 i A_2 konačni. Tada naziv *strogo određena* ima jasno značenje: igraju li oba igrača optimalno, prvi će osvojiti točno V, a drugi platiti točno V (v. Propoziciju 1.32). S druge strane, ako je $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$, strategija koja postiže $\underline{\lambda}$ jamči prvom igraču barem $\underline{\lambda}$, a strategija koja postiže $\overline{\lambda}$ jamči drugom igraču da neće izgubiti više od $\overline{\lambda}$, ali ostaje neodređeno kako će se među njima rasporediti ostatak $\overline{\lambda} - \underline{\lambda}$.

U sljedećim ćemo propozicijama ustanoviti vezu između Nashovog ekvilibrija i optimalnih strategija. Prije toga, uočimo da je kod igre sa sumom nula s dva igrača strateški profil (a_1^*, a_2^*) Nashov ekvilibrij ako i samo ako je $u_1(a_1^*, a_2^*) \geqslant u_1(a_1, a_2^*)$ za sve $a_1 \in A_1$ i $-u_1(a_1^*, a_2^*) \geqslant -u_1(a_1^*, a_2)$ za sve $a_2 \in A_2$. Drugim riječima, zahtijevamo da je

$$u_1(a_1, a_2^*) \leqslant u_1(a_1^*, a_2^*) \leqslant u_1(a_1^*, a_2), \quad \text{za sve } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2. \tag{1.5}$$

Točke (a_1^*, a_2^*) koje zadovoljavaju ovo svojstvo nazivamo **sedlastim točkama**: u njima je u_1 najveća u smjeru prve varijable, a najmanja u smjeru druge, poput sedla.

Propozicija 1.31. *Ako je (A_1, A_2, u_1) igra sa sumom nula s dva igrača i Nashovim ekvilibrijem (a_1^*, a_2^*), tada je ona strogo određena s vrijednosti $u_1(a_1^*, a_2^*)$. Štoviše, a_1^* je optimalna strategija prvog igrača, a a_2^* optimalna strategija drugog igrača.*

Dokaz. Uočimo da je zbog nejednakosti (1.5) i veličina iz Definicije 1.27

$$u_1(a_1^*, a_2^*) = \inf_{a_2 \in A_2} u_1(a_1^*, a_2) = \underline{\Lambda}(a_1^*) \leqslant \sup_{a_1 \in A_1} \underline{\Lambda}(a_1) = \underline{\lambda}.$$

Analogno dobivamo

$$u_1(a_1^*, a_2^*) = \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2^*) = \overline{\Lambda}(a_2^*) \geqslant \inf_{a_2 \in A_2} \overline{\Lambda}(a_2) = \overline{\lambda}.$$

Spajanjem ova dva niza nejednakosti dobivamo da je $\underline{\lambda} \geqslant \overline{\lambda}$. Međutim, iz Leme 1.28 znamo da je i $\underline{\lambda} \leqslant \overline{\lambda}$, pa sve nejednakosti moraju u stvari biti jednakosti, odakle slijede sve tvrdnje iz propozicije. □

Propozicija 1.32. *Neka je (A_1, A_2, u_1) strogo određena igra sa sumom nula s dva igrača s vrijednosti V, te neka su a_1^* i a_2^* redom optimalne strategije prvog i drugog igrača. Tada je (a_1^*, a_2^*) Nashov ekvilibrij i $u_1(a_1^*, a_2^*) = V$.*

Dokaz. Budući da su a_1^* i a_2^* optimalne strategije, za sve $a_1 \in A_1$ i $a_2 \in A_2$ imamo

$$u_1(a_1, a_2^*) \leqslant \overline{\Lambda}(a_2^*) = V = \underline{\Lambda}(a_1^*) \leqslant u_1(a_1^*, a_2).$$

Uvrštavanjem $a_1 = a_1^*$ i $a_2 = a_2^*$ vidimo da je $V = u_1(a_1^*, a_2^*)$, pa gornje nejednakosti postaju upravo (1.5): (a_1^*, a_2^*) je sedlasta točka, odnosno Nashov ekvilibrij. □

Korolar 1.33. *U igri sa sumom nula s dva igrača svi Nashovi ekvilibriji imaju istu isplatu, a strategije iz različitih ekvilibrija mogu se slobodno kombinirati: ako su (a_1^*, a_2^*) i (b_1^*, b_2^*) Nashovi ekvilibriji, onda su to i (a_1^*, b_2^*) i (b_1^*, a_2^*).*

Dokaz. Prema Propozicijama 1.31 i 1.32, strateški je profil Nashov ekvilibrij ako i samo ako se sastoji od optimalne strategije prvog i optimalne strategije drugog igrača, a svaki ekvilibrij ima isplatu V. Obje tvrdnje odmah slijede. □

Upravo ta dva svojstva čine igre sa sumom nula s dva igrača posebno ugodnima za analizu: nema problema *izbora* ekvilibrija. U općim strateškim igrama ona ne vrijede: različiti ekvilibriji mogu imati različite isplate, a kombinacija strategija iz dvaju ekvilibrija ne mora biti ekvilibrij.

Nashov teorem iz prethodnog poglavlja daje i opći dovoljan uvjet za strogu određenost. Pritom za funkciju f kažemo da je *kvazi-konveksna* ako je $-f$ kvazi-konkavna.

Korolar 1.34. *Neka je (A_1, A_2, u_1) igra sa sumom nula s dva igrača u kojoj su $A_1 \subset \mathbf{R}^{m_1}$ i $A_2 \subset \mathbf{R}^{m_2}$ neprazni, konveksni i kompaktni, u_1 je neprekidna, funkcija $u_1(\cdot, a_2)$ je kvazi-konkavna za svaki $a_2 \in A_2$, a funkcija $u_1(a_1, \cdot)$ kvazi-konveksna za svaki $a_1 \in A_1$. Tada je igra strogo određena i oba igrača imaju optimalne strategije.*

Dokaz. Igra zadovoljava pretpostavke Teorema 1.18: za prvog igrača po pretpostavci, a za drugog zato što je $u_2(a_1,\cdot) = -u_1(a_1,\cdot)$ kvazi-konkavna. Ona stoga ima Nashov ekvilibrij (a_1^*, a_2^*), pa tvrdnja slijedi iz Propozicije 1.31. □

To je inačica poznatog von Neumannovog, odnosno Sionovog *teorema o minimaksu*. Najvažniji je slučaj onaj u kojem su A_1 i A_2 simpleksi, a u_1 bilinearna – to su matrične igre iz sljedećeg odjeljka.

Vratimo se na kraju igri *Pogodi ruku*. Ona nije strogo određena, jer je $\underline{\lambda} = 0 < 1 = \overline{\lambda}$, pa prema Propoziciji 1.31 nema Nashovog ekvilibrija. To se vidi i izravno iz matrice: sedlasta točka bila bi polje koje je najveće u svom stupcu i najmanje u svom retku, a takvog polja nema. U sljedećem ćemo odjeljku vidjeti da se praznina između 0 i 1 zatvara čim igračima dopustimo da strategije biraju nasumično.

1.9. Matrične igre

Definicija 1.35. **Matrična igra** je mješovito proširenje konačne igre sa sumom nula s dva igrača.

Iz definicije je jasno da je svaka matrična igra ujedno i bimatrična igra. Također, lako je vidjeti da je svaka matrična igra ujedno i igra sa sumom nula. Doista, za proizvoljni mješoviti strateški profil s imamo

$$u_1(s) + u_2(s) = \sum_{a\in\mathcal{A}} (u_1(a)s(a) + u_2(a)s(a)) = \sum_{a\in\mathcal{A}} (u_1(a) + u_2(a))s(a) = 0.$$

Teorem 1.36 (Minimax teorem). *Svaka matrična igra je strogo određena.*

Dokaz. Kao direktnu posljedicu Teorema 1.20 imamo da svaka matrična igra ima Nashov ekvilibrij. Tada iz Propozicije 1.31 slijedi da je svaka matrična igra i strogo određena. □

Napomena. Zainteresirani čitatelj može naći elementarni dokaz prethodnog teorema u sekciji 1.11.

Ako na matričnu igru gledamo kao na poseban slučaj bimatrične igre, tada za pripadne matrice $\mathbf{U}^{(1)}$ i $\mathbf{U}^{(2)}$ vrijedi $\mathbf{U}^{(1)} = -\mathbf{U}^{(2)}$, odnosno jedna matrica određena je drugom, pa ćemo koristiti jednostavniju oznaku $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(1)}$. Prisjetimo se, $u_{\cdot j} = \mathbf{U}e_j^T$, slično za $u_{i\cdot}$.

Propozicija 1.37. *Za matričnu igru s matricom* $\mathbf{U}$*, te sve mješovite strategije* $x \in S_1$ *i* $y \in S_2$ *vrijedi*

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{j\in A_2} x\mathbf{U}e_j^T \quad i \quad \overline{\Lambda}(y) = \max_{i\in A_1} e_i\mathbf{U}y^T.$$

Dokaz. Uočimo najprije da je

$$\underline{\Lambda}(x) = \inf_{y\in S_2} u_1(x,y) = \inf_{y\in S_2} x\mathbf{U}y^T \leqslant \min_{j\in A_2} x\mathbf{U}e_j^T. \tag{1.6}$$

S druge strane, za proizvoljni $y \in S_2$ imamo da je

$$x\mathbf{U}y^T = \sum_{k\in A_2} (x\mathbf{U}e_k^T)y_k \geqslant \sum_{k\in A_2} \Big(\min_{j\in A_2} x\mathbf{U}e_j^T\Big)y_k = \Big(\min_{j\in A_2} x\mathbf{U}e_j^T\Big) \sum_{k\in A_2} y_k = \min_{j\in A_2} x\mathbf{U}e_j^T,$$

pa uzimanjem infimuma po $y \in S_2$ dobivamo da u (1.6) vrijedi i obratna nejednakost.

Druga jednakost iz propozicije dokazuje se analogno. □

Drugim riječima, najgori slučaj za igrača koji igra mješovitu strategiju uvijek se postiže nekom *čistom* strategijom protivnika. To računanje vrijednosti svodi na konačno mnogo usporedbi.

Primjer 1.38 (**Pogodi ruku**, nastavak). Promotrimo matričnu igru pridruženu igri iz Primjera 1.26. Mješovita strategija birača je $x = (p, 1-p)$, gdje je p vjerojatnost da pokaže na desnu ruku, a skrivačeva je $y = (q, 1-q)$, gdje je q vjerojatnost da oba zlatnika stavi u desnu ruku. Prema

Propoziciji 1.37 je

$$\underline{\Lambda}(x) = \min\{x\mathbf{U}e_1^T,\, x\mathbf{U}e_2^T\} = \min\{2p,\, 1-p\},$$
$$\overline{\Lambda}(y) = \max\{e_1\mathbf{U}y^T,\, e_2\mathbf{U}y^T\} = \max\{2q,\, 1-q\}.$$

Funkcija $p \mapsto \min\{2p, 1-p\}$ raste na $[0, \frac{1}{3}]$ i pada na $[\frac{1}{3}, 1]$, pa je donja vrijednost matrične igre jednaka $\underline{\Lambda}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, a $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ je optimalna strategija birača. Jednako tako, $q \mapsto \max\{2q, 1-q\}$ postiže minimum $\frac{2}{3}$ u $q = \frac{1}{3}$, pa je gornja vrijednost također $\frac{2}{3}$, a $y^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ je optimalna strategija skrivača. Dakle, $V = \frac{2}{3}$: nasumičnim izborom birač si jamči očekivani dobitak $\frac{2}{3}$, što god skrivač učinio, a skrivač si jamči da u očekivanju neće izgubiti više od $\frac{2}{3}$. U terminima pravedne cijene: za pravo igranja birač bi trebao platiti $\frac{2}{3}$ zlatnika.

ZADATAK 1.6. Dokažite (izravno iz definicije Nashovog ekvilibrija) da je $\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ Nashov ekvilibrij matrične igre iz Primjera 1.38. Je li taj Nashov ekvilibrij jedinstven? *Uputa:* Korolar 1.33.

U primjeru je vrijednost matrične igre, $\frac{2}{3}$, pala između donje i gornje vrijednosti polazne igre u čistim strategijama, 0 i 1. To vrijedi općenito.

PROPOZICIJA 1.39. *Neka je (A_1, A_2, u_1) konačna igra sa sumom nula s dva igrača s donjom vrijednosti $\underline{\lambda}$ i gornjom vrijednosti $\overline{\lambda}$, te neka je V vrijednost pridružene matrične igre. Tada je*

$$\underline{\lambda} \leqslant V \leqslant \overline{\lambda}.$$

Posebno, ako je polazna igra strogo određena, tada je $V = \underline{\lambda} = \overline{\lambda}$ i oba igrača imaju optimalne čiste strategije, pa im randomizacija nije potrebna.

DOKAZ. Po Teoremu 1.36 je $V = \sup_{x\in S_1} \underline{\Lambda}(x) = \inf_{y\in S_2} \overline{\Lambda}(y)$, gdje su $\underline{\Lambda}$ i $\overline{\Lambda}$ veličine pridružene matričnoj igri, kao u Propoziciji 1.37. Za čistu strategiju $x = e_i$ ta propozicija daje $\underline{\Lambda}(e_i) = \min_{j\in A_2} e_i\mathbf{U}e_j^T = \min_{j\in A_2} u_1(i,j)$, a to je upravo dobitak koji si strategija i jamči u polaznoj igri. Stoga je

$$V = \sup_{x\in S_1} \underline{\Lambda}(x) \geqslant \max_{i\in A_1} \underline{\Lambda}(e_i) = \max_{i\in A_1} \min_{j\in A_2} u_1(i,j) = \underline{\lambda},$$

i analogno $V \leqslant \overline{\lambda}$. Ako je $\underline{\lambda} = \overline{\lambda}$, tada je V jednak objema, a čista strategija e_i za koju je $\min_{j\in A_2} u_1(i,j) = \underline{\lambda}$ (postoji jer je A_1 konačan) zadovoljava $\underline{\Lambda}(e_i) = V$, odnosno optimalna je u matričnoj igri. Analogno za drugog igrača. □

1.10. Rješavanje matričnih igara

Sada ćemo pokazati kako se matrične igre *rješavaju*, odnosno kako se pronalaze njihova vrijednost i optimalne strategije igrača. Opći postupak svodi igru na problem linearnog programiranja, koji se zatim rješava simpleks metodom. Uz to ćemo pokazati i grafičku metodu, primjenjivu samo kad jedan igrač ima dvije čiste strategije, te kako se igra ponekad može smanjiti uklanjanjem dominiranih strategija.

Kroz cijeli odjeljak $\mathbf{U}$ je matrica igre tipa $m\times n$, $x \in S_1 \subset \mathbf{R}^m$ i $y \in S_2 \subset \mathbf{R}^n$ su mješovite strategije zapisane kao retci, a $\mathbf{1}$ označava redak sastavljen od jedinica, duljine koja je jasna iz konteksta. Nejednakosti među vektorima i matricama podrazumijevaju se po komponentama.

1.1.10.1. Svođenje na linearno programiranje. Prema Propoziciji 1.37, prvi igrač strategijom x jamči $\underline{\Lambda}(x) = \min_{j\in A_2} x\mathbf{U}e_j^T$, pa je donja vrijednost matrične igre

$$\underline{\lambda} = \max_{x\in S_1} \underline{\Lambda}(x) = \max\{v \in \mathbf{R} \colon x\mathbf{U} \geqslant v\mathbf{1},\ x \geqslant 0,\ x\mathbf{1}^T = 1\}.$$

Desna je strana problem linearnog programiranja u varijablama $(x, v) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$: funkcija cilja v je linearna, a sva su ograničenja linearne nejednakosti i jednadžbe. Analogno je gornja vrijednost

$$\overline{\lambda} = \min_{y \in S_2} \overline{\Lambda}(y) = \min\{w \in \mathbf{R} \colon \mathbf{U}y^T \leqslant w\mathbf{1}^T,\ y \geqslant 0,\ \mathbf{1}y^T = 1\}.$$

Po teoremu o minimaksu (Teorem 1.36) oba problema imaju istu optimalnu vrijednost V, a optimalna rješenja (x^*, V) i (y^*, V) daju optimalne strategije igrača.

Za računanje je zgodnije ukloniti slobodnu varijablu v i ograničenje $x\mathbf{1}^T = 1$. To je moguće čim je matrica igre pozitivna, a to uvijek možemo postići.

LEMA 1.40 (pomak matrice). *Neka je $c \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{U}_c = \mathbf{U} + c\mathbf{J}$, gdje je $\mathbf{J}$ matrica tipa $m \times n$ sa svim elementima jednakim 1. Tada je $x\mathbf{U}_c y^T = x\mathbf{U}y^T + c$ za sve $x \in S_1$ i $y \in S_2$. Posljedično, matrične igre s matricama $\mathbf{U}$ i $\mathbf{U}_c$ imaju iste optimalne strategije, a vrijednost druge za c je veća od vrijednosti prve.*

DOKAZ. Zbog $x\mathbf{J}y^T = (x\mathbf{1}^T)(\mathbf{1}y^T) = 1$ prva tvrdnja slijedi odmah. Iz nje je $\underline{\Lambda}_c(x) = \underline{\Lambda}(x) + c$ i $\overline{\Lambda}_c(y) = \overline{\Lambda}(y) + c$ za sve x i y, odakle slijedi ostalo. □

Pretpostavimo, dakle, da je $\mathbf{U} > 0$, tj. da su svi elementi matrice pozitivni. Tada je $\underline{\Lambda}(x) \geqslant \min_{i,j} u_{ij} > 0$ za svaki $x \in S_1$, pa je i $V > 0$, i u problemu za prvog igrača možemo promatrati samo $v > 0$. Za takav dopustiv par (x, v) stavimo $x' = x/v$. Tada je $x' \geqslant 0$, $x'\mathbf{U} \geqslant \mathbf{1}$ i $x'\mathbf{1}^T = 1/v$. Obratno, za svaki $x' \geqslant 0$ s $x'\mathbf{U} \geqslant \mathbf{1}$ je $x' \neq 0$, pa su $x = x'/(x'\mathbf{1}^T)$ i $v = 1/(x'\mathbf{1}^T)$ dopustivi u polaznom problemu. Maksimizirati v isto je, dakle, što i minimizirati $x'\mathbf{1}^T$:

$$\min\ x'\mathbf{1}^T \qquad \text{uz} \qquad x'\mathbf{U} \geqslant \mathbf{1}, \quad x' \geqslant 0, \tag{LP$_1$}$$

a iz optimalnog rješenja x'^* dobivamo

$$V = \frac{1}{x'^*\mathbf{1}^T}, \qquad x^* = \frac{x'^*}{x'^*\mathbf{1}^T}.$$

Jednako tako, za drugog igrača stavljamo $y' = y/w$ i dolazimo do problema

$$\max\ y'\mathbf{1}^T \qquad \text{uz} \qquad \mathbf{U}y'^T \leqslant \mathbf{1}^T, \quad y' \geqslant 0, \tag{LP$_2$}$$

čije optimalno rješenje y'^* daje $V = 1/(y'^*\mathbf{1}^T)$ i $y^* = y'^*/(y'^*\mathbf{1}^T)$.

Problemi (LP$_1$) i (LP$_2$) su par *dualnih* problema linearnog programiranja u standardnom simetričnom obliku: matrica ograničenja jednoga je transponirana matrica drugoga, a vektori desne strane i funkcije cilja zamijenili su uloge. Slaba dualnost za taj par u biti je Lema 1.28, a jaka dualnost – jednakost optimalnih vrijednosti – teorem o minimaksu. U Odjeljku 1.11 iskoristit ćemo to u suprotnom smjeru i teorem o minimaksu *dokazati* iz dualnosti. Za rješavanje igre dovoljno je riješiti jedan od dvaju problema: simpleks metoda uz optimalno rješenje jednoga daje i optimalno rješenje drugoga. (Za opći prikaz veze matričnih igara i linearnog programiranja v. i [**Pet08**, Odjeljak 12.2].)

1.1.10.2. Simpleks metoda. Ponovimo ukratko simpleks metodu, i to u obliku prilagođenom problemu (LP$_2$): maksimiziramo $z = y_1 + \cdots + y_n$ uz ograničenja $\mathbf{U}y^T \leqslant \mathbf{1}^T$, $y \geqslant 0$ (crtice na varijablama ispuštamo). Uvođenjem *dopunskih varijabli* $s_1, \ldots, s_m \geqslant 0$ ograničenja postaju jednadžbe

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} y_j + s_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Točka $y = 0$, $s = \mathbf{1}$ je dopustiva; njezine *bazične* varijable su $s_1, \ldots, s_m$. Podatke zapisujemo u simpleks tablicu

	y_1	$\cdots$	y_n	s_1	$\cdots$	s_m	
s_1	u_{11}	$\cdots$	u_{1n}	1			1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$
s_m	u_{m1}	$\cdots$	u_{mn}			1	1
z	-1	$\cdots$	-1	0	$\cdots$	0	0

Svaki redak zapisuje jednu jednadžbu, s desnom stranom u posljednjem stupcu; z-redak zapisuje funkciju cilja u obliku $z - y_1 - \cdots - y_n = 0$. U svakoj tablici bazična varijabla ima jedinicu u svom retku, a nule u ostalima, uključujući z-redak. Koraci su sljedeći.

(i) *Test optimalnosti.* Ako su svi koeficijenti z-retka (osim desne strane) nenegativni, tablica je optimalna: bazične varijable očitavamo iz posljednjeg stupca, nebazične su jednake 0, a desna strana z-retka je optimalna vrijednost z^*.

(ii) *Ulazna varijabla.* U suprotnom biramo stupac q s negativnim koeficijentom u z-retku.

(iii) *Izlazna varijabla.* Među retcima p u kojima je element a_{pq} stupca q pozitivan biramo onaj s najmanjim omjerom (desna strana)/a_{pq}. (Ako takvog retka nema, problem je neograničen, što se kod (LP_2) s $\mathbf{U} > 0$ ne može dogoditi.)

(iv) *Pivotiranje.* Redak p dijelimo s a_{pq}, a zatim njegove višekratnike oduzimamo od ostalih redaka, uključujući z-redak, tako da stupac q postane jedinični. Varijabla stupca q postaje bazična u retku p, a dosadašnja bazična varijabla retka p izlazi iz baze. Vraćamo se na korak 1.

Pravilo izbora i cikliranje. U koraku 2 najčešće se bira stupac s najnegativnijim koeficijentom (*Dantzigovo pravilo*), jer takav izbor u pravilu najbrže povećava funkciju cilja. Ono, međutim, ne jamči da postupak završava. Kad je tablica *degenerirana*, tj. kad je neka bazična varijabla jednaka 0, pivotiranje može ostaviti vrijednost funkcije cilja nepromijenjenom, a niz takvih koraka može se vratiti na već viđenu bazu; to se zove *cikliranje*. Primjeri cikliranja su rijetki i umjetni, ali postoje. Biramo li u koracima 2 i 3 uvijek varijablu *najmanjeg indeksa* – ulaznu među stupcima s negativnim koeficijentom, izlaznu među retcima s najmanjim omjerom – cikliranje je nemoguće i postupak sigurno završava nakon konačno mnogo pivotiranja. To je *Blandovo pravilo*. U velikim problemima Dantzigovo pravilo (ili neka njegova inačica) obično je brže, a cikliranje se u praksi ne pojavljuje; u malim primjerima koje rješavamo rukom razlika u broju koraka je zanemariva, a Blandovo pravilo ima prednost što je jednoznačno i što jamči završetak. U primjerima u nastavku zato koristimo Blandovo pravilo.

Očitavanje rješenja za prvog igrača. Optimalna tablica sadrži i rješenje problema (LP_1): ono je dano koeficijentima z-retka u stupcima dopunskih varijabli,

$$x'^* = (\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_m), \qquad \text{gdje je } \bar{d}_i \text{ koeficijent uz } s_i \text{ u optimalnom } z\text{-retku.}$$

Evo zašto. Svaki z-redak nastao je iz početnoga dodavanjem višekratnika redaka ograničenja, pa predstavlja jednadžbu

$$z + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{d}_i s_i = z^*$$

koja vrijedi u svim točkama koje zadovoljavaju ograničenja. Uvrstimo li $z = \sum_j y_j$ i $s_i = 1 - \sum_j u_{ij} y_j$, dobivamo identitet u varijablama $y_1, \ldots, y_n$, pa usporedbom koeficijenata slijedi $\sum_i \bar{d}_i = z^*$ i $\sum_i \bar{d}_i u_{ij} = 1 + \bar{c}_j \geqslant 1$ za sve j. Dakle, $x'^* = \bar{d} \geqslant 0$ je dopustiv za (LP_1), s vrijednošću funkcije cilja z^* jednakom optimalnoj vrijednosti problema (LP_2). Kako za svaki dopustivi par vrijedi $x'\mathbf{1}^T \geqslant x'\mathbf{U}y'^T \geqslant y'\mathbf{1}^T$, nijedan dopustivi x' ne može imati vrijednost manju od z^*, pa je x'^* optimalan.

Jedinstvenost i alternativni optimumi. Jednadžba $z + \sum_j \bar{c}_j y_j + \sum_i \bar{d}_i s_i = z^*$ vrijedi u svakoj dopustivoj točki, a u optimalnoj tablici su svi koeficijenti $\bar{c}_j$, $\bar{d}_i$ nenegativni. Stoga je dopustiva točka optimalna ako i samo ako su u njoj sve varijable s *pozitivnim* koeficijentom u z-retku jednake 0. Posebno, ako sve nebazične varijable imaju pozitivan koeficijent, optimalno rješenje je jedinstveno. Nebazična varijabla s koeficijentom 0 upućuje na moguće alternativne optimume: pivotiranjem u njezinu stupcu (uz uobičajeni izbor izlaznog retka) dobivamo drugo optimalno bazično rješenje s istom vrijednošću z^*. Optimalne su tada i sve konveksne kombinacije nađenih rješenja, jer je skup optimalnih rješenja konveksan.

Primjer 1.41. Riješimo matričnu igru zadanu matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matrica nije pozitivna, pa po Lemi 1.40 prelazimo na $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U} + \mathbf{J}$, čija je vrijednost za 1 veća, a optimalne su strategije iste. Problem (LP_2) za $\mathbf{U}_1$ glasi

$$\max\ y_1 + y_2 + y_3 \qquad \text{uz} \qquad \begin{aligned} 7y_1 + \ y_2 + 3y_3 &\leqslant 1, \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\leqslant 1, \\ y_1 + 6y_2 + 5y_3 &\leqslant 1, \end{aligned} \qquad y \geqslant 0.$$

Početna tablica je

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	$\boxed{7}$	1	3	1	0	0	1
s_2	4	3	2	0	1	0	1
s_3	1	6	5	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0

Sva tri koeficijenta z-retka su negativna, pa po Blandovu pravilu ulazi y_1; omjeri su $\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, 1$, pa izlazi s_1 i pivotiramo oko uokvirenog elementa. Dobivamo

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	
y_1	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$
s_2	0	$\frac{17}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$
s_3	0	$\boxed{\frac{41}{7}}$	$\frac{32}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{6}{7}$
z	0	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$

Sada ulazi y_2 (prvi stupac s negativnim koeficijentom; ovdje ujedno i najnegativniji); omjeri su $1, \frac{3}{17}, \frac{6}{41}$, pa izlazi s_3. Nakon pivotiranja oko $\frac{41}{7}$ dobivamo

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	
y_1	1	0	$\frac{13}{41}$	$\frac{6}{41}$	0	$-\frac{1}{41}$	$\frac{5}{41}$
s_2	0	0	$-\frac{66}{41}$	$-\frac{21}{41}$	1	$-\frac{17}{41}$	$\frac{3}{41}$
y_2	0	1	$\frac{32}{41}$	$-\frac{1}{41}$	0	$\frac{7}{41}$	$\frac{6}{41}$
z	0	0	$\frac{4}{41}$	$\frac{5}{41}$	0	$\frac{6}{41}$	$\frac{11}{41}$

U z-retku nema više negativnih koeficijenata: tablica je optimalna. Očitavamo $y'^* = (\frac{5}{41}, \frac{6}{41}, 0)$, $z^* = \frac{11}{41}$ i, iz koeficijenata uz s_1, s_2, s_3, $x'^* = (\frac{5}{41}, 0, \frac{6}{41})$. Vrijednost igre s matricom $\mathbf{U}_1$ je $1/z^* = \frac{41}{11}$, pa je vrijednost polazne igre

$$V = \frac{41}{11} - 1 = \frac{30}{11},$$

a optimalne su strategije

$$x^* = \frac{x'^*}{z^*} = \Big(\frac{5}{11}, 0, \frac{6}{11}\Big), \qquad y^* = \frac{y'^*}{z^*} = \Big(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0\Big).$$

Provjera: $x^*\mathbf{U} = (\frac{30}{11}, \frac{30}{11}, \frac{34}{11}) \geqslant \frac{30}{11}\mathbf{1}$ i $\mathbf{U}y^{*T} = (\frac{30}{11}, \frac{27}{11}, \frac{30}{11})^T \leqslant \frac{30}{11}\mathbf{1}^T$.

Primijetimo da je simpleks metoda sama "otkrila" da drugu čistu strategiju prvog igrača i treću čistu strategiju drugog igrača nije potrebno koristiti. U Primjeru 1.47 ćemo vidjeti da su te strategije dominirane, pa se ista igra može riješiti i bez tablica.

1.1.10.3. Još primjera; grafička metoda i dominacija. Riješimo simpleks metodom još dvije igre, u kojima jedan od igrača ima samo dvije čiste strategije. Nakon toga ćemo, radi ilustracije, pokazati kako se takve igre mogu riješiti i grafički.

Primjer 1.42. Riješimo matričnu igru zadanu matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Matrica je pozitivna, pa pomak nije potreban. Problem (LP_2) glasi

$$\max\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \qquad \text{uz} \qquad \begin{aligned} 10y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 &\leqslant 1, \\ 2y_1 + 10y_2 + 8y_3 + 12y_4 &\leqslant 1, \end{aligned} \qquad y \geqslant 0.$$

Početna tablica je

	y_1	y_2	y_3	y_4	s_1	s_2	
s_1	$\boxed{10}$	2	4	1	1	0	1
s_2	2	10	8	12	0	1	1
z	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Po Blandovu pravilu ulazi y_1; omjeri su $\frac{1}{10}$ i $\frac{1}{2}$, pa izlazi s_1. Nakon pivotiranja dobivamo

	y_1	y_2	y_3	y_4	s_1	s_2	
y_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
s_2	0	$\boxed{\frac{48}{5}}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{59}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$
z	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$

Negativne koeficijente imaju y_2, y_3 i y_4; po Blandovu pravilu ulazi y_2. (Dantzigovo bi pravilo uzelo y_4, s koeficijentom $-\frac{9}{10}$, i trebalo bi jedno pivotiranje više, s nazivnicima 59 i 118 u međukoraku.) Omjeri su $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{12}$, pa izlazi s_2:

	y_1	y_2	y_3	y_4	s_1	s_2	
y_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{48}$	$\frac{5}{48}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$
y_2	0	1	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$\frac{59}{48}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{12}$
z	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Tablica je optimalna: $z^* = \frac{1}{6}$, $y'^* = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0, 0)$ i, iz koeficijenata uz s_1, s_2, $x'^* = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$. Dakle,

$$V = 6, \qquad x^* = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big), \qquad y^* = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\Big).$$

Nebazična varijabla y_3 ima u z-retku koeficijent 0, pa drugi igrač ima i drugih optimalnih strategija. Pivotirajmo u stupcu y_3: omjeri su $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{9}$, pa izlazi y_2 i dobivamo

	y_1	y_2	y_3	y_4	s_1	s_2	
y_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
y_3	0	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{59}{36}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$
z	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

s istom vrijednošću $z^* = \frac{1}{6}$ i nepromijenjenim x'^*; novo optimalno rješenje je $y' = (\frac{1}{18}, 0, \frac{1}{9}, 0)$, odnosno strategija $(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0)$. Štoviše, time smo našli *sve* optimalne strategije drugog igrača. Naime, u optimalnoj tablici pozitivne koeficijente imaju y_4, s_1 i s_2, pa je u svakom optimalnom rješenju $y'_4 = s_1 = s_2 = 0$, tj. oba su ograničenja zadovoljena s jednakošću:

$$10y'_1 + 2y'_2 + 4y'_3 = 1, \qquad 2y'_1 + 10y'_2 + 8y'_3 = 1, \qquad y' \geqslant 0.$$

Rješenja tog sustava čine segment čiji su krajevi upravo dva nađena vrha. Dijeljenjem sa $z^* = \frac{1}{6}$ zaključujemo da je skup optimalnih strategija drugog igrača

$$\operatorname{conv}\Big((\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0), (\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{2}{3}, 0)\Big) = \{(y_1, 3y_1 - 1, 2 - 4y_1, 0) \colon y_1 \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}]\}.$$

Primjer 1.43. Riješimo matričnu igru zadanu matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \\ 4 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

To je transponirana matrica iz prethodnog primjera, ali igra je druga: sada prvi igrač ima četiri, a drugi dvije čiste strategije. Problem (LP_2) je max $y_1 + y_2$ uz četiri ograničenja, pa tablica ima četiri retka:

	y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
s_1	$\boxed{10}$	2	1	0	0	0	1
s_2	2	10	0	1	0	0	1
s_3	4	8	0	0	1	0	1
s_4	1	12	0	0	0	1	1
z	-1	-1	0	0	0	0	0

Ulazi y_1; omjeri su $\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1$, pa izlazi s_1:

	y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
y_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
s_2	0	$\frac{48}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$
s_3	0	$\frac{36}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	$\frac{3}{5}$
s_4	0	$\boxed{\frac{59}{5}}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	1	$\frac{9}{10}$
z	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$

Ulazi y_2; omjeri su $\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{9}{118}$, pa izlazi s_4:

	y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
y_1	1	0	$\frac{6}{59}$	0	0	$-\frac{1}{59}$	$\frac{5}{59}$
s_2	0	0	$-\frac{7}{59}$	1	0	$-\frac{48}{59}$	$\frac{4}{59}$
s_3	0	0	$-\frac{20}{59}$	0	1	$-\frac{36}{59}$	$\frac{3}{59}$
y_2	0	1	$-\frac{1}{118}$	0	0	$\frac{5}{59}$	$\frac{9}{118}$
z	0	0	$\frac{11}{118}$	0	0	$\frac{4}{59}$	$\frac{19}{118}$

Tablica je optimalna: $z^* = \frac{19}{118}$, $y'^* = (\frac{5}{59}, \frac{9}{118})$ i $x'^* = (\frac{11}{118}, 0, 0, \frac{4}{59})$. Dakle,

$$V = \frac{118}{19}, \qquad x^* = \Big(\frac{11}{19}, 0, 0, \frac{8}{19}\Big), \qquad y^* = \Big(\frac{10}{19}, \frac{9}{19}\Big).$$

Obje nebazične varijable, s_1 i s_4, imaju pozitivne koeficijente u z-retku, pa je y^* jedina optimalna strategija drugog igrača.

Grafička metoda. Kad jedan igrač ima samo dvije čiste strategije, njegove mješovite strategije čine segment, pa se funkcija $\underline{\Lambda}$ (odnosno $\overline{\Lambda}$) može nacrtati i igra riješiti sa slike. Pokazujemo to na igri iz Primjera 1.42. Metoda je ograničena na taj posebni slučaj, pa je navodimo radi ilustracije; simpleks metoda uvijek daje isto.

Primjer 1.44. Riješimo grafički igru iz Primjera 1.42, zadanu matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Skup mješovitih strategija prvog igrača možemo poistovjetiti sa skupom $[0,1]$ na način da $x \in [0,1]$ predstavlja strategiju $(x, 1-x)$.

Prema Propoziciji 1.37 znamo da je

$$\begin{aligned} V &= \max_{x\in[0,1]} \underline{\Lambda}(x) = \max_{x\in[0,1]} \min_{j\in A_2} (x, 1-x)u_{\cdot j} \\ &= \max_{x\in[0,1]} \min_{j\in A_2} (u_{2j} + (u_{1j} - u_{2j})x). \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $j \in A_2$ izraz unutar minimuma u posljednjoj jednakosti određuje jedan segment. Konkretno, imamo

$$\begin{aligned} &\text{segment } p_1: \quad 2 + 8x, \\ &\text{segment } p_2: \quad 10 - 8x, \\ &\text{segment } p_3: \quad 8 - 4x, \\ &\text{segment } p_4: \quad 12 - 11x. \end{aligned}$$

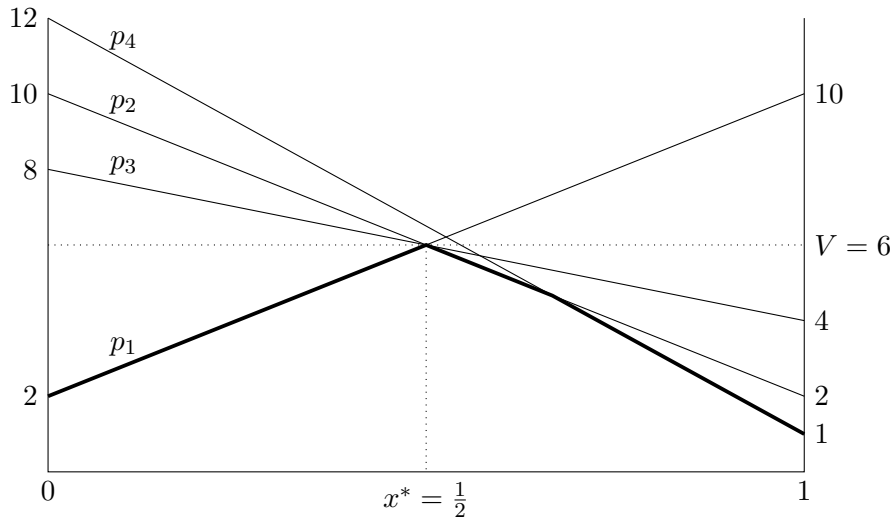
Ideja je da skiciramo ove segmente, te potom za svaki $x \in [0,1]$ odredimo minimalnu vrijednost na tim segmentima. Maksimum od svih tih minimalnih vrijednosti tada će biti vrijednost igre, dok će točka (ili točke) u kojoj se postiže taj maksimum odgovarati optimalnoj strategiji prvog igrača.

Iz dijagrama vidimo da je vrijednost igre $V = 6$, te da je jedina optimalna strategija prvog igrača $x^* = \frac{1}{2}$, odnosno $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Odredimo još i optimalne strategije drugog igrača. Te optimalne strategije su elementi $y \in S_2$ za koje je

$$V = \overline{\Lambda}(y) = \max_{x\in[0,1]} (x, 1-x)\mathbf{U}y^T = \max_{x\in[0,1]} \sum_{j\in A_2} y_j \cdot (u_{2j} + (u_{1j} - u_{2j})x).$$

Drugim riječima, tražimo sve $y \in S_2$ za koje je *najviša razina* (tj. najveća ordinata neke točke na njemu) segmenta p_y, kojeg dobijemo kao pripadnu konveksnu kombinaciju segmenata p_1, p_2, p_3 i p_4, jednaka $V = 6$.



Konveksna kombinacija p_y se za $x = \frac{1}{2}$ neće nalaziti iznad visine 6 ako i samo ako segment p_4 dolazi s koeficijentom $y_4 = 0$. Dakle, sve optimalne strategije drugog igrača bit će oblika $(y_1, y_2, y_3, 0)$. Pripadni segment p_y je konveksna kombinacija segmenata p_1, p_2 i p_3 koji svi prolaze točkom $(\frac{1}{2}, 6)$, pa kroz nju zato mora prolaziti i p_y. Budući da se niti jedan dio segmenta p_y ne smije nalaziti iznad razine $V = 6$, zaključujemo da je p_y upravo horizontalni segment s ordinatom jednakom 6. Posebno, budući da je $(0, 6) \in p_y$ dobivamo da je

$$2y_1 + 10y_2 + 8y_3 = 6.$$

Nadalje, kako je y vjerojatnosna distribucija znamo da je $y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$ i $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Rješavanjem ovako dobivenog sustava jednadžbi dobivamo da je skup optimalnih strategija drugog igrača

$$\{(y_1, 3y_1 - 1, 2 - 4y_1, 0) \colon y_1 \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}]\} = \operatorname{conv}((\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{2}{3}, 0), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0)),$$

u skladu s Primjerom 1.42.

Napomena. Sve optimalne strategije drugog igrača u ovom primjeru imaju zajedničko svojstvo: pravac p_{y^*} je konstantan, i to na razini V. To nije slučajnost. Pravac p_y je konstantan i jednak V točno kada je $e_1 \mathbf{U} y^T = e_2 \mathbf{U} y^T = V$, a to je, prema Korolaru 1.56, nužno za svaku optimalnu strategiju y^* čim postoji optimalna strategija prvog igrača x^* s $0 < x^* < 1$ (ovdje $x^* = \frac{1}{2}$). Obratno, ako je p_y konstantan i jednak V, onda je $\overline{\Lambda}(y) = V$, pa je y optimalna. Sama konstantnost nije dovoljna: $y = (\frac{35}{64}, \frac{13}{64}, 0, \frac{1}{4})$ daje konstantan pravac p_y, ali na razini $\frac{49}{8} > 6$, pa ta strategija nije optimalna. Isto tako, ako je $x^* \in \{0, 1\}$, optimalne strategije drugog igrača ne moraju davati konstantan pravac.

Igre u kojima drugi igrač ima dvije čiste strategije rješavaju se grafički na isti način, samo se umjesto donje ovojnice segmenata (minimuma) traži gornja ovojnica (maksimum) i njezin minimum.

Zadatak 1.7. Riješite grafički igru iz Primjera 1.43 i usporedite s rješenjem dobivenim simpleks metodom.

Dominacija. Sada ćemo pokazati kako u nekim posebnim slučajevima matrične igre možemo prije rješavanja smanjiti.

Krenimo s jednim jednostavnim primjerom. Promotrimo matričnu igru zadanu matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 10 & 8 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je peta čista strategija drugog igrača (ona koja odgovara petom stupcu) za njega strogo gora od treće strategije. Dakle, štogod da prvi igrač odigra, drugom igraču je bolje da odabere treću

strategiju nego petu. U ovakvoj situaciji reći ćemo da je peta strategija strogo dominirana trećom. Ako pričamo o mješovitim strategijama drugog igrača, očekujemo da nikoja optimalna strategija neće uključivati njegovu petu čistu strategiju s pozitivnom vjerojatnošću – ako se priča o optimalnim strategijama, možemo se slobodno praviti kao da peta čista strategija drugog igrača niti ne postoji.

Možemo vidjeti i da je treća strategija drugog igrača i sama dominirana i to mješovitom strategijom koja uključuje prvu i drugu strategiju. Doista, kod mješovitih strategija oblika $(\alpha, 1-\alpha, 0, 0, 0)$ dobivamo da su isplate prema prvom igraču dane s

$$\alpha \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\alpha + 2 \\ 10 - 8\alpha \end{pmatrix},$$

a za $\alpha \in \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{8} \rangle$ doista možemo postići da je $8\alpha + 2 < 5$ i $10 - 8\alpha < 8$. Dakle, na sličan način kao i prije očekujemo da optimalne strategije drugog igrača neće uključivati treću strategiju budući da je strogo efikasnije koristiti specifičnu kombinaciju prvih dviju strategija.

Sada možemo precizno definirati upravo uvedene pojmove te dokazati prezentiranu heuristiku za optimalne strategije.

Definicija 1.45. Neka je matrična igra zadana nekom matricom $\mathbf{U}$. Za mješovitu strategiju x prvog igrača kažemo da **strogo dominira** njegovu i-tu čistu strategiju ukoliko je $x\mathbf{U} > u_{i\cdot}$ (po elementima). Slično, za mješovitu strategiju y drugog igrača kažemo da strogo dominira njegovu j-tu čistu strategiju ukoliko je $\mathbf{U}y^T < u_{\cdot j}$ (po elementima).

Propozicija 1.46. *Neka je matrična igra zadana nekom matricom $\mathbf{U}$ te neka je x^* neka optimalna strategija prvog igrača. Pretpostavimo da je i-ta čista strategija prvog igrača dominirana nekom mješovitom strategijom. Tada je $x_i^* = 0$.*

Analogni zaključak vrijedi i za drugog igrača, odnosno ako je njegova j-ta čista strategija dominirana nekom mješovitom strategijom, tada za svaku optimalnu strategiju y^* drugog igrača vrijedi $y_j^* = 0$.

Dokaz. Neka je x mješovita strategija koja strogo dominira i-tu čistu strategiju prvog igrača. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_i = 0$, budući da u suprotnom strategiju x možemo zamijeniti sa mješovitom strategijom

$$\tfrac{1}{1-x_i}(x_{-i}, 0)$$

koja ima to svojstvo, a u isto vrijeme također strogo dominira i-tu čistu strategiju budući da je

$$\tfrac{1}{1-x_i}(x_{-i}, 0)\mathbf{U} = \tfrac{1}{1-x_i}(x\mathbf{U} - x_i u_{i\cdot}) > \tfrac{1}{1-x_i}(u_{i\cdot} - x_i u_{i\cdot}) = u_{i\cdot}.$$

Tražena tvrdnja slijedi iz činjenice da za svaki $y \in S_2$ u nejednakosti

$$\begin{aligned} x^*\mathbf{U}y^T &= \sum_{k\in A_1} x_k^*(\mathbf{U}y^T)_k = \sum_{k\in A_1, k\neq i} x_k^*(\mathbf{U}y^T)_k + x_i^* u_{i\cdot} y^T \leqslant \sum_{k\in A_1, k\neq i} x_k^*(\mathbf{U}y^T)_k + x_i^* x\mathbf{U}y^T \\ &= \sum_{k\in A_1, k\neq i} x_k^*(\mathbf{U}y^T)_k + \sum_{k\in A_1, k\neq i} x_i^* x_k (\mathbf{U}y^T)_k \\ &= (x_{-i}^* + x_i^* x_{-i}, 0)\mathbf{U}y^T, \end{aligned}$$

znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $x_i^* = 0$. Dakle, mora vrijediti $x_i^* = 0$ jer smo u protivnom pronašli strategiju prvog igrača koja je "jednostrano isplativija". □

PRIMJER 1.47. Riješimo sada bez tablica matričnu igru iz Primjera 1.41, zadanu matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je druga strategija prvog igrača dominirana mješovitom strategijom[13] $(\frac{7}{12}, 0, \frac{5}{12})$. Doista, vrijedi da je

$$(\tfrac{7}{12}, 0, \tfrac{5}{12})\mathbf{U} = (\tfrac{7}{2}, \tfrac{25}{12}, \tfrac{17}{6}) > (3, 2, 1).$$

Dakle, svaka optimalna strategija prvog igrača će odabirati drugu strategiju s vjerojatnosti 0. Iz tog razloga možemo promatrati novu igru nastalu izbacivanjem te strategije koja je onda zadana matricom

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sada možemo uočiti da je treća strategija drugog igrača dominirana mješovitom strategijom $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$ budući da je

$$\mathbf{V}(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, 0)^T = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{15}{4})^T < (2, 4)^T.$$

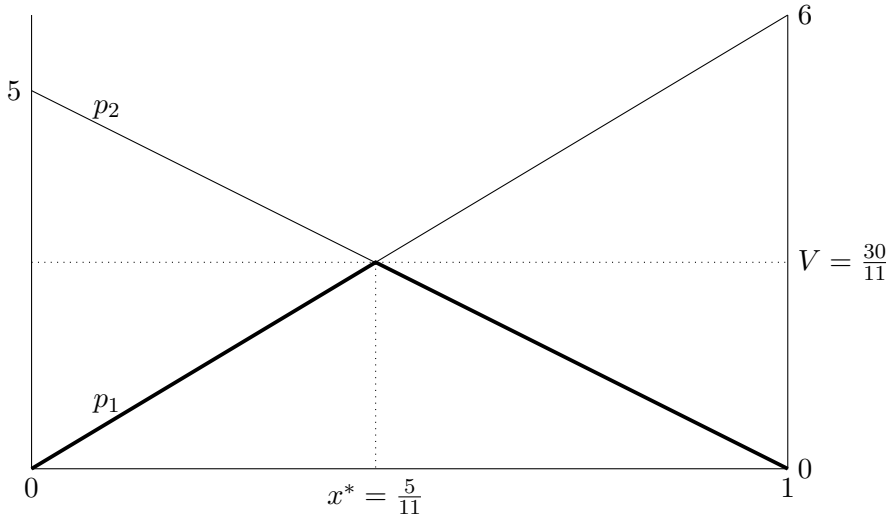
Slično kao i prije, možemo zaključiti da svaka optimalna strategija drugog igrača će odabirati njegovu treću strategiju s vjerojatnosti 0, pa je također možemo ukloniti. Tako dolazimo do matrice

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

a nju možemo riješiti grafički. Skiciramo segmente

$$\begin{aligned} \text{segment } p_1: &\quad 6x, \\ \text{segment } p_2: &\quad 5 - 5x, \end{aligned}$$

pa dobivamo da je vrijednost igre $V = \frac{30}{11}$, a optimalna strategija prvog igrača $(\frac{5}{11}, 0, \frac{6}{11})$ (druga koordinata odgovara prethodno izbačenoj drugoj čistoj strategiji). Optimalnu strategiju drugog igrača možemo dobiti iz jednadžbe $5y_2 = \frac{30}{11}$ i činjenice da je (y_1, y_2) vjerojatnosna distribucija. To daje strategiju $(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0)$ – u skladu s Primjerom 1.41.



ZADATAK 1.8. Dokažite Propoziciju 1.46.

Rješenje se nalazi nakon Propozicije 1.46.

[13] Do ovog zaključka možemo doći tako da pokušamo riješiti sustav nejednadžbi

$$\alpha(6, 0, 2) + (1 - \alpha)(0, 5, 4) > (3, 2, 1)$$

u skupu $\alpha \in [0, 1]$.

ZADATAK 1.9. Odredite vrijednost matrične igre zadane donjom matricom, te pronađite optimalne strategije igrača, (a) uklanjanjem dominiranih strategija i grafički, (b) simpleks metodom.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & -1 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Rješenje. Druga strategija prvog igrača je strogo dominirana mješavinom ostalih dviju (provjerite!) Rješavanjem preostale 2×4 matrične igre dobivamo optimalnu strategiju $(1/3, 0, 2/3)$ za prvog igrača i skup optimalnih strategija $\{(y_1, 0, 5/3-3y_1, -2/3+2y_1) : y_1 \in [1/3, 5/9]\}$ za drugog igrača. Vrijednost igre je $17/3$.

ZADATAK 1.10. Osmislite model za igru jedanaesteraca: igrači su izvođač jedanaesteraca i golman, i ovisno o odabranim strategijama, oni dobivaju određene (očekivane) korisnosti. Ne postoji točan odgovor, tako da Vaša verzija igre može biti proizvoljno jednostavna ili komplicirana.

Ukoliko je moguće, pronađite optimalne strategije i vrijednost igre, te interpretirajte rezultat. Možete koristiti alate po želji, primjerice online kalkulatore za igre (v. web stranicu kolegija), LP solvere ili AI.

Završimo primjerom koji se rješava bez ikakvih tablica, iz same simetrije igre.

PRIMJER 1.48 (Kamen–papir–škare). Oba igrača istovremeno pokazuju kamen, papir ili škare. Kamen tupi škare, škare režu papir, a papir pokriva kamen; pobjednik dobiva 1 od gubitnika, a pri jednakom izboru nema isplate. Uz poredak čistih strategija (kamen, papir, škare) za oba igrača matrica igre je

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zašto bez simpleks metode? Simpleks metoda bi, nakon pomaka matrice za 1, i ovdje dala rješenje u nekoliko pivotiranja. No matrica igre je antisimetrična, a ta simetrija daje vrijednost igre odmah, dok princip izjednačavanja (Korolar 1.56) daje optimalne strategije; stoga računamo izravno.

Vrijednost. Matrica je antisimetrična, $\mathbf{U}^T = -\mathbf{U}$; to izražava simetriju igre (zamjenom uloga igrača isplata mijenja predznak). Za svaki $x \in S_1$ je $x\mathbf{U}x^T$ realan broj, dakle jednak svojoj transponiranoj matrici, pa je $x\mathbf{U}x^T = x\mathbf{U}^T x^T = -x\mathbf{U}x^T$, odnosno $x\mathbf{U}x^T = 0$. Kako je ovdje $S_1 = S_2$, uvrštavanjem $y = x$ u definiciju $\underline{\Lambda}$ odnosno $x = y$ u definiciju $\overline{\Lambda}$ dobivamo

$$\max_{x\in S_1} \underline{\Lambda}(x) \leqslant \max_{x\in S_1} x\mathbf{U}x^T = 0 = \min_{y\in S_2} y\mathbf{U}y^T \leqslant \min_{y\in S_2} \overline{\Lambda}(y).$$

Prema Minimax teoremu lijeva i desna strana su jednake, pa je vrijednost igre $V = 0$. (Isti argument pokazuje da svaka matrična igra s antisimetričnom matricom ima vrijednost 0 te da je svaka optimalna strategija jednog igrača ujedno optimalna i za drugog.)

Optimalne strategije. Za $x = (x_1, x_2, x_3) \in S_1$ je

$$x\mathbf{U} = (x_2 - x_3,\ x_3 - x_1,\ x_1 - x_2),$$

a zbroj komponenata tog retka jednak je 0. Zato je $\underline{\Lambda}(x) = \min_j x\mathbf{U}e_j^T \leqslant 0$, s jednakošću ako i samo ako su sve tri komponente jednake 0, tj. ako i samo ako je $x_1 = x_2 = x_3$. Jedina optimalna strategija prvog igrača je stoga

$$x^* = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),$$

a isti račun s $\mathbf{U}y^T = (y_3 - y_2,\ y_1 - y_3,\ y_2 - y_1)^T$ pokazuje da je $y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ jedina optimalna strategija drugog igrača. Konkretno: protiv uniformne strategije svaka čista strategija daje očekivanu

isplatu 0, a svako odstupanje od nje protivnik kažnjava – igra li prvi igrač kamen češće nego škare ($x_1 > x_3$), drugi igrač odgovara papirom i ostvaruje isplatu $x_3 - x_1 < 0$ za prvog igrača.

Primijetimo i da je, u skladu s Korolarom 1.56, redak $x^*\mathbf{U} = (0,0,0)$ konstantan: protiv optimalne strategije x^* sve čiste strategije drugog igrača jednako su dobre.

1.11. Dodatak: Teorem o minimaksu i dualnost linearnog programiranja

Teorem o minimaksu (Teorem 1.36) dokazali smo kao posljedicu Nashovog teorema, dakle Kakutanijevog teorema o fiksnoj točki, koji nismo dokazali. U ovom odjeljku dajemo potpun i neovisan dokaz, koji počiva na dualnosti linearnog programiranja. Dualnost je poznata s kolegija iz linearnog programiranja, ali je ovdje dokazujemo u cijelosti, pa je odjeljak samodostatan: jedini vanjski alat je elementarna analiza u $\mathbf{R}^k$. Usput dobivamo i *princip izjednačavanja*, koristan pri računanju optimalnih strategija.

U ovom su odjeljku, za razliku od prethodnoga, svi vektori *stupci*; $\mathbf{1}$ je stupac jedinica, $|\cdot|$ je euklidska norma, a nejednakosti među vektorima su po komponentama.

1.1.11.1. Farkasova lema.

Lema 1.49 (o separaciji). *Neka je $C \subset \mathbf{R}^k$ neprazan, zatvoren i konveksan skup, te $b \in \mathbf{R}^k \setminus C$. Tada postoji $a \in \mathbf{R}^k$ takav da je*

$$\sup_{c\in C} a^T c < a^T b.$$

Dokaz. Odaberimo $c_1 \in C$ i stavimo $r = |b - c_1|$. Skup $C \cap \overline{K}(b,r)$ je neprazan i kompaktan, pa neprekidna funkcija $c \mapsto |b-c|$ na njemu postiže minimum u nekoj točki c_0; očito je tada $|b-c_0| \leqslant |b-c|$ za sve $c \in C$. Stavimo $a = b - c_0$; zbog $b \notin C$ je $a \neq 0$. Za $c \in C$ i $t \in \langle 0,1]$ je $c_0 + t(c-c_0) \in C$ zbog konveksnosti, pa je

$$|a|^2 = |b-c_0|^2 \leqslant |b - c_0 - t(c-c_0)|^2 = |a|^2 - 2t\, a^T(c-c_0) + t^2|c-c_0|^2.$$

Dijeljenjem s t i puštanjem $t \to 0^+$ dobivamo $a^T(c-c_0) \leqslant 0$, tj. $a^Tc \leqslant a^Tc_0 = a^Tb - |a|^2$ za sve $c \in C$. Kako desna strana ne ovisi o c i strogo je manja od a^Tb, tvrdnja slijedi. □

Lema 1.50 (konačno generirani konus je zatvoren). *Neka je $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$ matrica sa stupcima $a_1, \ldots, a_n$. Skup*

$$K = \{A\lambda \colon \lambda \in \mathbf{R}^n,\ \lambda \geqslant 0\} = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \colon \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0\}$$

je neprazan, konveksan i zatvoren.

Dokaz. Skup K sadrži 0 i očito je konveksan; dokazujemo zatvorenost.

Tvrdimo najprije da se svaki $z \in K$ može zapisati kao $z = \sum_{j\in J} \lambda_j a_j$ s $\lambda_j > 0$ za $j \in J$, pri čemu su stupci a_j, $j \in J$, linearno nezavisni. Među svim zapisima $z = A\lambda$ s $\lambda \geqslant 0$ odaberimo onaj čiji je nosač $J = \{j \colon \lambda_j > 0\}$ najmanji. Kad bi stupci a_j, $j \in J$, bili linearno zavisni, postojao bi $\mu \in \mathbf{R}^n$, $\mu \neq 0$, s $\mu_j = 0$ za $j \notin J$ i $A\mu = 0$; zamjenom μ s $-\mu$ možemo pretpostaviti da je $\mu_j > 0$ za barem jedan j. Za svaki $t \geqslant 0$ je $A(\lambda - t\mu) = z$, a za $t = \min\{\lambda_j/\mu_j \colon \mu_j > 0\}$ vektor $\lambda - t\mu$ je nenegativan i ima strogo manji nosač od λ, što je kontradikcija.

Za $J \subset \{1,\ldots,n\}$ takav da su stupci a_j, $j \in J$, linearno nezavisni označimo s A_J matricu sastavljenu od tih stupaca i $K_J = \{A_J\nu \colon \nu \in \mathbf{R}^J,\ \nu \geqslant 0\}$. Skup K_J je zatvoren: ako $A_J\nu_k \to z$, onda je, budući da A_J ima linearno nezavisne stupce pa je $A_J^TA_J$ regularna,

$$\nu_k = (A_J^TA_J)^{-1}A_J^T(A_J\nu_k) \longrightarrow (A_J^TA_J)^{-1}A_J^Tz =: \nu,$$

pri čemu je $\nu \geqslant 0$ kao limes nenegativnih vektora, i $A_J\nu = \lim_k A_J\nu_k = z$, dakle $z \in K_J$. Prema prvom dijelu dokaza K je unija skupova K_J po svim J s linearno nezavisnim stupcima (uključujući

$J = \emptyset$, uz $K_\emptyset = \{0\}$). Takvih je J konačno mnogo, pa je K zatvoren kao konačna unija zatvorenih skupova. □

TEOREM 1.51 (Farkasova lema). *Neka je $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$ i $b \in \mathbf{R}^k$. Točno jedna od sljedećih dviju tvrdnji je istinita:*

(i) postoji $x \in \mathbf{R}^n$, $x \geqslant 0$, takav da je $Ax = b$;
(ii) postoji $y \in \mathbf{R}^k$ takav da je $A^T y \geqslant 0$ i $b^T y < 0$.

DOKAZ. Obje tvrdnje ne mogu vrijediti istodobno: za takve x i y bilo bi $0 \leqslant x^T(A^T y) = (Ax)^T y = b^T y < 0$.

Pretpostavimo da (i) ne vrijedi, tj. $b \notin K = \{Ax\colon x \geqslant 0\}$. Po Lemi 1.50 skup K je neprazan, zatvoren i konveksan, pa po Lemi 1.49 postoji $a \in \mathbf{R}^k$ sa svojstvom $\sup_{z\in K} a^T z < a^T b$. Zbog $0 \in K$ je $a^T b > 0$. Nadalje, za svaki stupac a_j i svaki $t \geqslant 0$ je $ta_j \in K$, pa je $t\,a^T a_j < a^T b$ za sve $t \geqslant 0$, što je moguće samo ako je $a^T a_j \leqslant 0$. Dakle je $A^T a \leqslant 0$, pa $y = -a$ zadovoljava (ii). □

KOROLAR 1.52 (Farkasova lema za nejednakosti). *Neka je $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$ i $b \in \mathbf{R}^k$. Točno jedna od sljedećih dviju tvrdnji je istinita:*

(i) postoji $x \in \mathbf{R}^n$, $x \geqslant 0$, takav da je $Ax \leqslant b$;
(ii) postoji $y \in \mathbf{R}^k$, $y \geqslant 0$, takav da je $A^T y \geqslant 0$ i $b^T y < 0$.

DOKAZ. Tvrdnja (i) vrijedi ako i samo ako postoji $(x, s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, $(x, s) \geqslant 0$, takav da je $Ax + s = b$, odnosno $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}\binom{x}{s} = b$. Primijenimo Teorem 1.51 na matricu $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$: alternativa tvrdnji (i) je postojanje $y \in \mathbf{R}^k$ s $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}^T y = \binom{A^T y}{y} \geqslant 0$ i $b^T y < 0$, a to je upravo (ii). □

1.1.11.2. Dualnost linearnog programiranja. Neka su $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbf{R}^k$ i $c \in \mathbf{R}^n$. Promatramo par problema

$$\begin{aligned} &\text{(P)} \qquad \min\ c^T x \qquad \text{uz} \qquad Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0, \\ &\text{(D)} \qquad \max\ b^T y \qquad \text{uz} \qquad A^T y \leqslant c, \quad y \geqslant 0, \end{aligned}$$

koje zovemo *primalni* i *dualni* problem (*simetrični oblik* dualnosti). Vektor x je *dopustiv* za (P) ako zadovoljava njegova ograničenja, a *optimalan* ako je dopustiv i vrijednost $c^T x$ nije veća od vrijednosti ni u jednoj drugoj dopustivoj točki; analogno za (D). Problemi (LP_1) i (LP_2) su ovog oblika: uz $A = \mathbf{U}^T$ (tipa $n \times m$), $b = \mathbf{1} \in \mathbf{R}^n$ i $c = \mathbf{1} \in \mathbf{R}^m$, problem (P) je upravo (LP_1) zapisan za stupac x'^T, a (D) je (LP_2) zapisan za stupac y'^T.

TEOREM 1.53 (slaba dualnost). *Ako je x dopustiv za (P), a y dopustiv za (D), onda je $b^T y \leqslant c^T x$.*

DOKAZ. Vrijedi $b^T y \leqslant (Ax)^T y = x^T(A^T y) \leqslant x^T c$: u prvoj nejednakosti koristimo $Ax \geqslant b$ i $y \geqslant 0$, a u drugoj $A^T y \leqslant c$ i $x \geqslant 0$. □

TEOREM 1.54 (jaka dualnost). *Ako oba problema (P) i (D) imaju dopustivih točaka, onda oba imaju optimalna rješenja i njihove se optimalne vrijednosti podudaraju:*

$$\min\{c^T x\colon Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\} = \max\{b^T y\colon A^T y \leqslant c,\ y \geqslant 0\}.$$

DOKAZ. Po slaboj dualnosti dovoljno je naći dopustive x^* i y^* s $c^T x^* \leqslant b^T y^*$. Tada je, naime, $c^T x^* = b^T y^*$, a za svaki dopustivi x je $c^T x \geqslant b^T y^* = c^T x^*$, pa je x^* optimalan; analogno je y^* optimalan. Drugim riječima, dovoljno je pokazati da sustav

$$-Ax \leqslant -b, \qquad A^T y \leqslant c, \qquad c^T x - b^T y \leqslant 0, \qquad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \tag{1.7}$$

ima rješenje. Pretpostavimo suprotno. Sustav (1.7) je oblika $M\binom{x}{y} \leqslant d$, $\binom{x}{y} \geqslant 0$, uz

$$M = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & A^T \\ c^T & -b^T \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} -b \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

pa po Korolaru 1.52 postoje $u \in \mathbf{R}^k$, $v \in \mathbf{R}^n$ i $t \in \mathbf{R}$, svi nenegativni, takvi da je $M^T(u,v,t)^T \geqslant 0$ i $d^T(u,v,t)^T < 0$, odnosno

$$-A^T u + tc \geqslant 0, \qquad Av - tb \geqslant 0, \qquad c^T v - b^T u < 0. \tag{1.8}$$

Ako je $t > 0$, onda su $\tilde{u} = u/t$ i $\tilde{v} = v/t$ po prvim dvjema relacijama dopustivi redom za (D) i (P), a treća daje $c^T\tilde{v} < b^T\tilde{u}$, što je u suprotnosti sa slabom dualnošću. Ako je $t = 0$, relacije (1.8) glase $A^T u \leqslant 0$, $Av \geqslant 0$ i $c^T v < b^T u$. Uzmimo dopustive točke x_0 za (P) i y_0 za (D). Tada je

$$b^T u \leqslant (Ax_0)^T u = x_0^T(A^T u) \leqslant 0 \qquad \text{i} \qquad c^T v \geqslant (A^T y_0)^T v = y_0^T(Av) \geqslant 0,$$

pa je $c^T v \geqslant 0 \geqslant b^T u$, što je opet kontradikcija. □

1.1.11.3. Dokaz teorema o minimaksu.

Teorem 1.55 (o minimaksu, drugi dokaz). *Svaka matrična igra je strogo određena, oba igrača imaju optimalne strategije, i igra ima Nashov ekvilibrij.*

Dokaz. Po Lemi 1.40 možemo pretpostaviti da je $\mathbf{U} > 0$. Uz $A = \mathbf{U}^T$, $b = \mathbf{1} \in \mathbf{R}^n$ i $c = \mathbf{1} \in \mathbf{R}^m$ problem (P) je (LP_1), a (D) je (LP_2). Oba su dopustiva: za (LP_2) je dopustiv $y' = 0$, a za (LP_1) je dopustiv $x' = t\mathbf{1}^T$ čim je $t \geqslant 1/\min_{i,j} u_{ij}$. Po Teoremu 1.54 oba problema imaju optimalna rješenja, zapišimo ih kao retke x'^* i y'^*, i vrijedi $x'^*\mathbf{1}^T = y'^*\mathbf{1}^T =: \gamma$. Iz $x'^*\mathbf{U} \geqslant \mathbf{1}$ slijedi $x'^* \neq 0$, pa je $\gamma > 0$. Stavimo $x^* = x'^*/\gamma \in S_1$ i $y^* = y'^*/\gamma \in S_2$. Tada je $x^*\mathbf{U} \geqslant \frac{1}{\gamma}\mathbf{1}$, pa je $\underline{\Lambda}(x^*) \geqslant \frac{1}{\gamma}$ i stoga $\underline{\lambda} \geqslant \frac{1}{\gamma}$; isto tako iz $\mathbf{U}y^{*T} \leqslant \frac{1}{\gamma}\mathbf{1}^T$ slijedi $\overline{\Lambda}(y^*) \leqslant \frac{1}{\gamma}$ i $\overline{\lambda} \leqslant \frac{1}{\gamma}$. Zajedno s Lemom 1.28 dobivamo

$$\tfrac{1}{\gamma} \leqslant \underline{\lambda} \leqslant \overline{\lambda} \leqslant \tfrac{1}{\gamma},$$

pa je igra strogo određena s vrijednosti $V = 1/\gamma$. Nadalje, $\underline{\Lambda}(x^*) \leqslant \underline{\lambda} = V \leqslant \underline{\Lambda}(x^*)$ daje $\underline{\Lambda}(x^*) = V$, i analogno $\overline{\Lambda}(y^*) = V$: strategije x^* i y^* su optimalne. Konačno, (x^*, y^*) je Nashov ekvilibrij po Propoziciji 1.32. □

Ovaj dokaz ne koristi ni Nashov ni Kakutanijev teorem. Zajedno s Propozicijom 1.31, koja daje obrat, on zaokružuje teoriju matričnih igara u potpunosti dokazanu u ovim bilješkama. Dokaz je k tome u načelu konstruktivan: simpleks metoda iz prethodnog odjeljka nalazi upravo x'^* i y'^*.

1.1.11.4. Princip izjednačavanja.

Korolar 1.56 (princip izjednačavanja). *Neka su $x^* \in S_1$ i $y^* \in S_2$ optimalne strategije u matričnoj igri s vrijednosti V. Tada je $x^*\mathbf{U}y^{*T} = V$ te vrijedi:*

(a) za svaki $i \in A_1$ s $x_i^* > 0$ je $e_i\mathbf{U}y^{*T} = V$;
(b) za svaki $j \in A_2$ s $y_j^* > 0$ je $x^*\mathbf{U}e_j^T = V$.

Drugim riječima, protiv optimalne strategije protivnika sve čiste strategije koje igrač koristi s pozitivnom vjerojatnošću u nekoj svojoj optimalnoj strategiji daju istu isplatu, i to točno V.

Dokaz. Iz $V = \underline{\Lambda}(x^*) \leqslant x^*\mathbf{U}y^{*T} \leqslant \overline{\Lambda}(y^*) = V$ slijedi $x^*\mathbf{U}y^{*T} = V$. Nadalje, $x^*\mathbf{U}y^{*T} = \sum_i x_i^*\,(e_i\mathbf{U}y^{*T})$ je konveksna kombinacija brojeva $e_i\mathbf{U}y^{*T} \leqslant \overline{\Lambda}(y^*) = V$. Konveksna kombinacija brojeva koji nisu veći od V jednaka je V samo ako su svi brojevi s pozitivnim koeficijentom jednaki V, što dokazuje (a). Tvrdnja (b) slijedi analogno iz $x^*\mathbf{U}y^{*T} = \sum_j y_j^*\,(x^*\mathbf{U}e_j^T)$ i $x^*\mathbf{U}e_j^T \geqslant \underline{\Lambda}(x^*) = V$. □

U terminima linearnog programiranja korolar je *komplementarnost* (engl. *complementary slackness*) za par (LP_1), (LP_2): pozitivna varijabla jednog problema odgovara ograničenju drugog koje je u optimumu zadovoljeno s jednakošću. Za rješavanje igara on daje praktičan postupak, kojim smo se zapravo već služili u Primjerima 1.44 i 1.47: pogodimo li nosače optimalnih strategija, same strategije dobivamo rješavanjem linearnog sustava

$$e_i \mathbf{U} y^T = V \quad (x_i^* > 0), \qquad y_j = 0 \quad (y_j^* = 0), \qquad \mathbf{1} y^T = 1,$$

i analognog sustava za x. U igrama $2 \times n$ to je upravo sadržaj napomene nakon Primjera 1.44, a u igri kamen–papir–škare princip odmah daje $x^* = y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: ako su optimalne strategije potpuno mješovite, protiv y^* sve tri čiste strategije prvog igrača daju $V = 0$, a sustav $y_3 - y_2 = y_1 - y_3 = y_2 - y_1 = 0$, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ ima jedinstveno rješenje.

1.12. Korelirani ekvilibrij

Primjer 1.57. Nekom raskrižju bez semafora istodobno se približavaju dva automobila iz okomitih smjerova te svaki od dva vozača treba odlučiti hoće li kroz raskrižje proći bez smanjenja brzine ili će se zaustaviti i pričekati dok se ne raščisti situacija. Pripadne korisnosti navedene su u sljedećoj bimatrici.

$$M = \begin{array}{c} \\ \text{prolazak} \\ \text{zaustavljanje} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{prolazak} & \text{zaustavljanje} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -10, -10 & 5, 0 \\ 0, 5 & -1, -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pripadna matrična igra ima dva očita Nashova ekvilibrija s čistim strategijama – u njima se jedan vozač s vjerojatnošću 1 zaustavlja, a drugi s vjerojatnošću 1 prolazi. Takvi se Nashovi ekvilibriji definitivno ne čine poštenima prema vozaču koji će se zaustavljati. Osim njih, postoji još i jedan Nashov ekvilibrij s mješovitim strategijama – $((\frac{3}{8}, \frac{5}{8}), (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}))$. Međutim, iako je ovakav Nashov ekvilibrij *pošten* (u smislu da oba vozača tretira jednako), ima bitnu manjkavost u tome da je kod oba igrača korisnost $-\frac{5}{8}$, što je dosta nisko.

Promatrajmo sada dodatak u kojem su gradske vlasti na ovo raskrižje uvele semafor koji na slučajan način propušta vozače iz okomitih smjerova u skladu sa sljedećom matricom.

$$\begin{array}{c} \\ \text{prolazak} \\ \text{zaustavljanje} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{prolazak} & \text{zaustavljanje} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.55 \\ 0.40 & 0.05 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Smatrat ćemo da će vozači proći nekažnjeno ukoliko ne budu slijedili što semafor nalaže. Ipak, pokažimo da je, usprkos tome, svakom vozaču optimalno slijediti semafor ukoliko zna da i drugi vozač to čini te ukoliko su mu poznate vjerojatnosti po kojima semafor radi.

Pretpostavimo da prvog vozača na semaforu dočeka zeleno svjetlo. Tada je iz matrice semafora jasno da drugom vozaču semafor pokazuje crveno, pa je prvom igraču u interesu doista i proći kroz svoje zeleno svjetlo. Ukoliko prvog vozača dočeka crveno svjetlo, tada je vjerojatnost da drugom vozaču semafor pokazuje zeleno svjetlo (uvjetno na crveno svjetlo kod prvog vozača) jednaka $\frac{0.40}{0.40+0.05} = \frac{8}{9}$. U skladu s time, ukoliko se prvi vozač zaustavi, očekivana korisnost mu je

$$\tfrac{8}{9} \cdot 0 + \tfrac{1}{9} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{9},$$

a ukoliko prođe, očekivana korisnost mu je jednaka

$$\tfrac{8}{9} \cdot (-10) + \tfrac{1}{9} \cdot 5 = -\tfrac{75}{9}.$$

Dakle, prvom igraču je bolje zaustaviti se, odnosno postupiti u skladu s crvenim svjetlom semafora. Zaključujemo da je prvom vozaču, štogod semafor pokazivao, najpametnije učiniti upravo to što semafor nalaže, ukoliko zna da će to učiniti i drugi vozač.

Do sličnog zaključka možemo doći i za drugog vozača. Kao i prije, ukoliko drugom vozaču semafor pokazuje zeleno svjetlo, može biti siguran da prvom vozaču pokazuje crveno, pa mu je najpametnije da prođe kroz raskrižje. S druge strane, ukoliko mu pokazuje crveno svjetlo, tada su vjerojatnosti da prvom vozaču pokazuje zeleno, odnosno crveno, svjetlo redom jednake $\frac{0.55}{0.55+0.05} = \frac{11}{12}$ i $\frac{0.05}{0.55+0.05} = \frac{1}{12}$. Ukoliko se drugi vozač zaustavi, očekivana korisnost bit će mu jednaka

$$\tfrac{11}{12} \cdot 0 + \tfrac{1}{12} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{12},$$

dok će mu u slučaju prolaska biti jednaka

$$\tfrac{11}{12} \cdot (-10) + \tfrac{1}{12} \cdot 5 = -\tfrac{105}{12}.$$

Ponovno zaključujemo da je drugom vozaču najpametnije slijediti semafor, ukoliko zna da to čini i prvi vozač.

Uočimo da će, ukoliko oba vozača budu slijedila semafor, očekivana korisnost prvog vozača biti jednaka

$$0 \cdot (-10) + 0.55 \cdot 5 + 0.40 \cdot 0 + 0.05 \cdot (-1) = 2.7,$$

a drugog

$$0 \cdot (-10) + 0.55 \cdot 0 + 0.40 \cdot 5 + 0.05 \cdot (-1) = 1.95.$$

Vidimo da su očekivane korisnosti oba vozača značajno veće nego kod prethodno promatranog Nashovog ekvilibrija.

U skladu s ovim primjerom sada ćemo motivirati definiciju za općenitu bimatričnu igru. U nastavku ovog odjeljka, A_1 i A_2 će, kao i inače, označavati skupove čistih strategija prvog i drugog igrača, a $\mathbf{U}^{(1)}$ i $\mathbf{U}^{(2)}$ pripadne matrice korisnosti.

Koreliranim strategijama nazivat ćemo vjerojatnosne distribucije $\mathbf{P} = (p_{ij})$ na skupu $A_1 \times A_2$ čistih strateških profila, ili, ekvivalentno, matrice dimenzija $|A_1| \times |A_2|$ s nenegativnim elementima kojima je suma jednaka 1. To znači da će par strategija (i, j) biti realiziran s vjerojatnošću p_{ij} i u tom slučaju prvom igraču će biti sugerirano da odigra strategiju i, a drugom igraču da odigra strategiju j.

Ukoliko se prvi igrač doista i odluči za strategiju i očekivana korisnost iznosit će

$$\frac{\sum_{j \in A_2} p_{ij} u_{ij}^{(1)}}{\sum_{j \in A_2} p_{ij}}.$$

Ono što želimo postići je da ova očekivana korisnost bude veća ili jednaka od očekivane korisnosti ukoliko se prvi igrač odluči za neku drugu strategiju k, odnosno od vrijednosti

$$\frac{\sum_{j \in A_2} p_{ij} u_{kj}^{(1)}}{\sum_{j \in A_2} p_{ij}}.$$

Slično razmatranje potom provodimo i za drugog igrača i tako dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 1.58. **Korelirani ekvilibrij** bimatrične igre je korelirana strategija $\mathbf{P} = (p_{ij})$ za koju vrijedi

$$\sum_{j \in A_2} p_{ij}(u_{ij}^{(1)} - u_{kj}^{(1)}) \geqslant 0, \quad \text{za sve } i, k \in A_1, \tag{1.9}$$

$$\sum_{i \in A_1} p_{ij}(u_{ij}^{(2)} - u_{il}^{(2)}) \geqslant 0, \quad \text{za sve } j, l \in A_2. \tag{1.10}$$

Zadatak 1.11. Za bimatričnu igru M iz prethodnog primjera, pronađite neki *simetrični* korelirani ekvilibrij za koji je vjerojatnost da oba vozača prođu kroz raskrižje jednaka nuli.

Rješenje. Jedna mogućnost je

$$\begin{array}{c} \\ \text{prolazak} \\ \text{zaustavljanje} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{prolazak} & \text{zaustavljanje} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Sljedeća propozicija, zajedno s Teoremom 1.20, pokazuje da će korelirani ekvilibrij uvijek postojati.

PROPOZICIJA 1.59. *Neka je (x^*, y^*) Nashov ekvilibrij bimatrične igre. Tada je $\mathbf{P} = (x_i^* y_j^*)$ jedan njen korelirani ekvilibrij.*

DOKAZ. $\mathbf{P}$ je očito korelirana strategija. Uočimo da je za proizvoljne $i, k \in A_1$

$$\sum_{j \in A_2} x_i^* y_j^* (u_{ij}^{(1)} - u_{kj}^{(1)}) = x_i^* (u_{i\cdot}^{(1)} y^{*T} - u_{k\cdot}^{(1)} y^{*T}).$$

Jedini način da ovo bude negativno je da imamo $x_i^* > 0$ i $u_{i\cdot}^{(1)} y^{*T} < u_{k\cdot}^{(1)} y^{*T}$. Međutim, ukoliko potonja nejednakost doista vrijedi, slijedi da je $i \notin \mathrm{PBR}_1(y^*)$ pa je zbog Propozicije 1.22 i činjenice da je $x^* \in \mathrm{BR}_1(y^*)$ nužno $i \notin \mathrm{supp}(x^*)$, odnosno $x_i^* = 0$, što daje kontradikciju.

Druga nejednakost iz definicije koreliranog ekvilibrija slijedi analogno. □

Postavlja se pitanje, kako usporediti različite (korelirane) ekvilibrije. Jedan kriterij je promatranje očekivane korisnosti pojedinih igrača. U primjeru 1.57 sa gore spomenutim semaforom, očekivana korisnost prvog igrača je

$$\sum_{i,j} p_{ij} u_{ij}^{(1)} = 0.55 \times 5 + 0.05 \times -1 = 2.7,$$

dakle znatno veća nego u simetričnom Nashovom ekvilibriju. Račun za drugog igrača ostavljamo čitatelju.

Odredimo sada na jednom konkretnom primjeru sve korelirane ekvilibrije.

PRIMJER 1.60. Bimatrična igra zadana je bimatricom

$$\begin{pmatrix} 5,2 & 1,3 \\ 2,3 & 4,1 \end{pmatrix}.$$

Želimo pronaći sve korelirane strategije $\mathbf{P} = (p_{ij})$ za koje je, u skladu s (1.9) i (1.10),

$$\begin{aligned} p_{11} - p_{12} &\geqslant 0 \qquad (i = 1, k = 2) \\ -p_{21} + p_{22} &\geqslant 0 \qquad (i = 2, k = 1) \\ -p_{11} + 2p_{21} &\geqslant 0 \qquad (j = 1, l = 2) \\ p_{12} - 2p_{22} &\geqslant 0 \qquad (j = 2, l = 1) \end{aligned}$$

Preostaje za riješiti ovaj sustav nejednadžbi (na skupu vjerojatnosnih distribucija[14]). Uočimo da ako pozbrojimo ove četiri nejednadžbe, dobivamo da je $p_{21} - p_{22} \geqslant 0$, pa u kombinaciji s drugom nejednadžbom dobivamo da je $p_{21} = p_{22}$. Sada slijedi da je

$$2p_{22} = 2p_{21} \geqslant p_{11} \geqslant p_{12} \geqslant 2p_{22},$$

pa zaključujemo da svuda mora vrijediti znak jednakosti. Jedina vjerojatnosna distribucija koja će to zadovoljavati je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

[14] Dakle, uz dodatne uvjete $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \geqslant 0$ i $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$.

ZADATAK 1.12. Dana je *simetrična* bimatrična igra sa dva igrača u kojoj je korisnost prvog igrača zadana 2×2 matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

pri čemu su $a, b, c \in [0, \infty)$ međusobno različiti parametri.
(a) Ovisno o parametrima $a, b, c \in [0, \infty)$, nađite korespondencije najboljeg odgovora za igru zadanu matricom $\mathbf{U}$. Odredite njene Nashove ekvilibrije.
(b) Za koje vrijednosti a, b, c je korelirana strategija

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

korelirani Nashov ekvilibrij promatrane igre?

Dodatni zadatak

Sljedeći zadatak nije dio prve domaće zadaće, ali naravno možete razmisliti o njemu.

ZADATAK 1.13 (**). Ana i Branka stavljaju na stol svatko po jednu kunu te igraju sljedeću varijantu "pokera". Svaki od igrača na početku dobije uniformno slučajan broj iz intervala $[0, 1]$. Ana pogleda svoj broj te se na temelju njega odlučuje na stol staviti još $y \in [0, +\infty)$ kuna. Branka nakon toga ima dvije opcije – ili će pratiti ili će odustati. U slučaju da prati, Branka također stavlja na stol y kuna, te igrač koji je dobio veći broj uzima sve sa stola (dakle, ukupno $2 \cdot (1 + y)$ kuna). U slučaju da odustane, Ana dobiva sve sa stola (dakle, ukupno $(1 + y) + 1$ kuna).

Odredite Nashov ekvilibrij u ovoj igri.

1.13. Zanimljivosti

Izvor: Karlin, Peres, *Game Theory Alive*. Teorija *igara sa dva igrača i sumom nula* je prvi put izložena u članku Johna von Neumanna (jednog od pionira računarstva) iz 1928., u kojem je i dokazao Minimax Teorem. Temelji teorije su dalje razvijeni u knjizi von Neumanna and Morgensterna iz 1944.

Minimax teorem je igrao ključnu ulogu u razvoju teorije linearnog programiranja. George Dantzig, jedan od pionira linearnog programiranja, iznosi sljedeću priču o svom prvom sastanku s von Neumannom [Dan82].

"On October 3, 1947, I visited him (von Neumann) for the first time at the Institute for Advanced Study at Princeton. I remember trying to describe to von Neumann, as I would to an ordinary mortal, the Air Force problem. I began with the formulation of the linear programming model in terms of activities and items, etc. Von Neumann did something which I believe was uncharacteristic of him. 'Get to the point,' he said impatiently. Having at times a somewhat low kindling point, I said to myself OK, if he wants a quicky, then thats what he will get. In under one minute I slapped the geometric and algebraic version of the problem on the blackboard. Von Neumann stood up and said 'Oh that!' Then for the next hour and a half, he proceeded to give me a lecture on the mathematical theory of linear programs. At one point seeing me sitting there with my eyes popping and my mouth open (after I had searched the literature and found nothing), von Neumann said: 'I don't want you to think I am pulling all this out of my sleeve at the spur of the moment like a magician. I have just recently completed a book with Oskar Morgenstern on the theory of games. What I am doing is conjecturing that the two problems are equivalent. The theory that I am outlining for your problem is an analogue to the one we have developed for games.' Thus I learned about Farkas' Lemma, and about duality for the first time."

POGLAVLJE 2

Evolucijska teorija igara

Počinjemo s nezanimljivom ali korisnom napomenom koja nam omogućava da pojednostavimo matrice s kojima baratamo. Obično je koristimo samo za 2 igrača.

NAPOMENA 2.1. Neka je $(\mathcal{S}, u)$ mješovito proširenje konačne strateške igre $(\mathcal{A}, u)$, te neka je i neki igrač i $\tilde{a}_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$. Za neki fiksni $\alpha \in \mathbf{R}$ definirajmo funkciju korisnosti $u' \colon \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ tako da je $u'_j = u_j$ za $j \neq i$ i

$$u'_i(a_{-i}, a_i) = \begin{cases} u_i(a_{-i}, a_i) + \alpha, & \text{za } a_{-i} = \tilde{a}_{-i}, \\ u_i(a_{-i}, a_i), & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada za svakog igrača j, $s_{-j} \in S_{-j}$ i $s_j, \overline{s}_j \in S_j$ vrijedi

$$u'_j(s_{-j}, s_j) - u'_j(s_{-j}, \overline{s}_j) = u_j(s_{-j}, s_j) - u_j(s_{-j}, \overline{s}_j).$$

Slijedi da igra nastala promjenom $u_i \mapsto u'_i$ ima isti skup Nashovih ekvilibrija kao i originalna igra.

Ključno za uočiti je da najbolji odgovor za neki $s_{-j} \in S_{-j}$ određujemo usporedbom vrijednosti $u_j(s_{-j}, s_j)$ za različite s_j, a prema prethodnoj lemi njihov se relativni odnos (razlika) ne mijenja ukoliko umjesto u_j promatramo u'_j. Slijedi da je Nashov ekvilibrij isti za funkciju korisnosti u, kao i za funkciju korisnosti u'.

2.1. Simetrične bimatrične igre i simetrični Nashovi ekvilibriji

DEFINICIJA 2.2. Bimatrična igra s matricama $\mathbf{U}^{(1)}$ i $\mathbf{U}^{(2)}$ je **simetrična** ako igrači imaju iste skupove strategija, te ukoliko je $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)T}$.

ZADATAK 2.1 (Simetrične igre). U Poglavlju 1 smo se već susreli sa simetričnim igrama. Dokažite da se prethodna definicija slaže s definicijom iz prethodnog poglavlja, tj. da uvjet $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)T}$ povlači da funkcije korisnosti zadovoljavaju

$$u_1(x, y) = u_2(y, x).$$

Dokažite da postoji Nashov ekvilibrij oblika (x, x), tj. **simetrični Nashov ekvilibrij**.

Rješenje. Vrijedi

$$u_1(x, y) = x\mathbf{U}^{(1)}y^T = x\left(\mathbf{U}^{(2)}\right)^T y^T = \left(y\mathbf{U}^{(2)}x\right)^T = u_2(y, x).$$

Nadalje, iz dokaza Teorema 1.18 i Teorema 1.20 znamo da je korespondencija najboljeg odgovora prvog igrača[1] $\mathrm{BR}_1 \colon S_1 \to S_1$ odozgo hemineprekidna s nepraznim, zatvorenim i konveksnim vrijednostima, pa po Kakutanijevom teoremu o fiksnoj točki (Teorem 1.17) postoji x^* takav da je $x^* \in \mathrm{BR}_1(x^*)$. Budući da je $\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(1)T}$, vrijedi i $x^* \in \mathrm{BR}_2(x^*)$, odakle slijedi da je (x^*, x^*) Nashov ekvilibrij.

Zbog ove veze između matrica $\mathbf{U}^{(1)}$ i $\mathbf{U}^{(2)}$, kod simetričnih bimatričnih igara dovoljno će biti navoditi samo jednu od njih (mi se odlučujemo za $\mathbf{U}^{(1)}$) koju ćemo onda kraće označavati s $\mathbf{U}$. Također, od interesa će nam biti **simetrični strateški profili**, odnosno strateški profili oblika (x, x). Iz tog razloga nećemo raditi veliku razliku između strategije x i pripadnog simetričnog strateškog profila (x, x).

[1] Uočimo da smo za domenu korespondencije BR_1 napisali da je S_1, a ne S_{-1} što je do sada bilo standardno. Ovdje je to opravdano, budući da imamo $S_{-1} = S_2 = S_1$.

PRIMJER 2.3. Pretpostavimo da imamo neku veliku populaciju neke životinjske vrste u kojoj svaka jedinka pokazuje ili agresivno ili pasivno ponašanje[2]. Podrazumijevamo da je tip ponašanja jedinke usađen u njenoj prirodi i da na njega ne može utjecati, odnosno da npr. agresivna jedinka se uvijek ponaša agresivno. Promotrimo situaciju u kojoj se jedinke na slučajan način nalaze u parovima te se natječu za neki ograničeni resurs, npr. mjesto za izgradnju gnijezda. Sljedeća bimatrica prikazuje pripadne korisnosti tih jedinki ovisno o kombinaciji njihovih tipova ponašanja

$$\begin{array}{c} \\ \text{A(gresivno)} \\ \text{P(asivno)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A(gresivno)} & \text{P(asivno)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,0 & 4,1 \\ 1,4 & 2,2 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2.1}$$

Uočimo da vrijedi $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)T}$, što je prirodno u danom kontekstu. Naime, korisnost jedinki ne smije ovisiti o tome promatramo li je kao prvog ili drugog igrača.

Budući da, u skladu s prethodnim komentarima, jedinke više nemaju izbora kako će se ponašati (već njihovo ponašanje ovisi o tome jesu li rođene kao agresivne ili pasivne jedinke), na mješovite strategije ćemo gledati na malo drugačiji način nego do sada – mješovita strategija $x = (x_A, x_P)$ označavat će udio odgovarajućih jedinki u sveukupnoj populaciji. Drugim riječima, u cijeloj populaciji biti će $x_A \cdot 100\%$ agresivnih i $x_P \cdot 100\%$ pasivnih jedinki. Od interesa će nam biti **simetrični strateški profili**.

Konkretna bimatrična igra (2.1) ima tri Nashova ekvilibrija, od kojih je samo jedan simetričan – $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$ i njega, zbog prethodnih komentara, možemo poistovjetiti sa strategijom $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. To znači da je optimalan udio agresivnih jedinki u populaciji jednak 2/3. No, što ako nas zanima "kako doći" do tog ekvilibrija?

Često će nam od interesa biti već najjednostavnije netrivijalne simetrične bimatrične igre – one zadane matricom $\mathbf{U}$ dimenzija 2×2. Neka je

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix},$$

te pretpostavimo da je $\mathbf{U}$ **generička**, odnosno da nema dva ista elementa u nekom retku ili stupcu. Neka je

$$\mathbf{U}' = \begin{pmatrix} u_{11} - u_{21} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} - u_{21} & 0 \\ 0 & u_{22} - u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

pri čemu je $u_1 = u_{11} - u_{21}$ i $u_2 = u_{22} - u_{12}$. Dokazat ćemo da simetrične bimatrične igre zadane matricama $\mathbf{U}$ i $\mathbf{U}'$ imaju iste Nashove ekvilibrije. Za tu svrhu koristit će nam Napomena 2.1.

Naime, uočimo da simetričnu bimatričnu igru zadanu matricom $\mathbf{U}'$ možemo dobiti iz igre zadane matricom $\mathbf{U}$ tako da originalnu funkciju korisnosti (reprezentiranu matricom $\mathbf{U}$) nekoliko puta transformiramo u skladu s prethodnom napomenom. Zato, kao što smo najavili, možemo zaključiti da simetrične bimatrične igre zadane matricama $\mathbf{U}$ i $\mathbf{U}'$ imaju iste Nashove ekvilibrije.

Koristeći ovo opažanje, može se dokazati sljedeća klasifikacija generičkih 2×2 simetričnih bimatričnih igara s obzirom na simetrične Nashove ekvilibrije.

PROPOZICIJA 2.4. *Neka je simetrična 2×2 bimatrična igra zadana nekom generičkom 2×2 matricom $\mathbf{U}$, te neka je $\mathbf{U}'$ kao u (2.2).*

- *Ako je $u_1 < 0$ i $u_2 > 0$, tada je druga čista strategija (e_2) jedini simetrični Nashov ekvilibrij.*
- *Ako je $u_1 > 0$ i $u_2 < 0$, tada je prva čista strategija (e_1) jedini simetrični Nashov ekvilibrij.*
- *Ako je $u_1, u_2 > 0$, tada su simetrični Nashovi ekvilibriji obje čiste strategije, te mješovita strategija $(u_2/(u_1 + u_2), u_1/(u_1 + u_2))$.*

[2] U engleskoj literaturi standardni nazivi za ova dva tipa ponašanja su redom *hawk* i *dove*.

- *Ako je $u_1, u_2 < 0$, tada je mješovita strategija $(u_2/(u_1+u_2), u_1/(u_1+u_2))$ jedini simetrični Nashov ekvilibrij.*

ZADATAK 2.2. (a) Dokažite prethodnu propoziciju.
(b) Postoje i Nashovi ekvilibriji koji nisu simetrični. Nađite *sve* Nashove ekvilibrije igara $\mathbf{U}$ i $\mathbf{U}'$.
(c) Za primjere simetričnih bimatričnih igara s 2×2 matricama u dosadašnjem dijelu kolegija, odredite matricu U' i klasificirajte ih u skladu s prethodnom Propozicijom.

Napomena. Dosadašnji primjeri su zatvorenikova dilema, Zadatak 1.1 (c) (Stag & Hare) i Primjer 1.57.

Rješenje. Za (a) i (b), koristimo metodu iz prvog poglavlja. Kao i prije, identificiramo S_1 i S_2 s $[0,1]$, tako da $(x, 1-x) \in S_1$ odgovara $x \in [0,1]$, i $(y, 1-y) \in S_2$ odgovara $y \in [0,1]$.
Odredimo BR_1. Imamo

$$x\mathbf{U}y^T = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = u_2(1-y)+x(u_1y-u_2(1-y)) = u_2-u_2y+x((u_1+u_2)y-u_2),$$

pa je

$$\mathrm{BR}_1(y) = \begin{cases} \{0\}, & \text{ako } y < \dfrac{u_2}{u_1+u_2}, \\ [0,1], & \text{ako } y = \dfrac{u_2}{u_1+u_2}, \\ \{1\}, & \text{ako } y > \dfrac{u_2}{u_1+u_2}. \end{cases}$$

Radi simetrije, $\mathrm{BR}_1 = \mathrm{BR}_2$. BR_1 i BR_2 se sijeku u točkama $x = y = 0$, $x = y = u_2/(u_1+u_2)$ i $x = y = 1$. Te točke odgovaraju traženim simetričnim Nashovim ekvilibrijima iz (a). Ova igra nema drugih Nashovih ekvilibrija.
U ostalim slučajevima za u_1 i u_2, postupak je isti, samo $\mathrm{BR}_1 = \mathrm{BR}_2$ ima drugačiji oblik.
Za $u_1 > 0, u_2 > 0$, imamo

$$\mathrm{BR}_1(y) = \{1\} \quad \text{za svaki } y \in [0,1].$$

Za $u_1, u_2 < 0$, imamo

$$\mathrm{BR}_1(y) = \begin{cases} \{1\}, & \text{ako } y < \dfrac{u_2}{u_1+u_2}, \\ [0,1], & \text{ako } y = \dfrac{u_2}{u_1+u_2}, \\ \{0\}, & \text{ako } y > \dfrac{u_2}{u_1+u_2}. \end{cases}$$

Vidimo da u svim slučajevima, igra zapravo imaju samo simetrične Nashove ekvilibrije.

2.2. Evolucijski stabilne strategije

U evolucijskoj teoriji igara, koncept simetričnog Nashovog ekvilibrija nam neće biti dovoljno jak, već će nam od interesa biti evolucijski stabilne strategije.

DEFINICIJA 2.5. Mješovita strategija x je **evolucijski stabilna strategija** ako za svaku mješovitu strategiju $y \neq x$ postoji neki $\epsilon_y \in \langle 0,1\rangle$ takav da za sve $\epsilon \in \langle 0, \epsilon_y\rangle$ vrijedi

$$u_1(x, \epsilon y + (1-\epsilon)x) > u_1(y, \epsilon y + (1-\epsilon)x).$$

Ako je bimatrična igra zadana matricom $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(1)}$, posljednju jednakost možemo matrično zapisati kao

$$x\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T > y\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T. \tag{2.3}$$

O nekoj evolucijski stabilnoj strategiji x možemo razmišljati na sljedeći način. Pretpostavimo da se velika populacija s razdiobom (mješovitom strategijom) x pomiješa s nekom manjom populacijom

s razdiobom y te na taj način dobijemo novu populaciju s razdiobom $\epsilon y + (1-\epsilon)x$. Uvjet evolucijske stabilnosti tada kaže da je u toj novoj populaciji, ukoliko je ϵ dovoljno mali, razdioba x i dalje bolji odgovor od razdiobe y populacije iz koje su nove jedinke došle – drugim riječima, originalna populacija će i dalje *prevagnuti*.

TEOREM 2.6. *Mješovita strategija x je evolucijski stabilna ako i samo ako je x Nashov ekvilibrij i vrijedi*

$$x\mathbf{U}y^T > y\mathbf{U}y^T \tag{2.4}$$

za sve mješovite strategije $y \neq x$ za koje je $x\mathbf{U}x^T = y\mathbf{U}x^T$.

DOKAZ. Pretpostavimo da je x neka evolucijski stabilna strategija. Dokažimo najprije da je x (odnosno, (x,x)) tada i Nashov ekvilibrij. Zbog simetričnosti je dovoljno pokazati da za svaku mješovitu strategiju y vrijedi $x\mathbf{U}x^T \geqslant y\mathbf{U}x^T$. Uzmimo ϵ_y iz definicije evolucijske stabilnosti. Tada za svaki $\epsilon \in (0, \epsilon_y)$ vrijedi

$$x\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T > y\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T.$$

Puštanjem $\epsilon \to 0$ dobivamo $x\mathbf{U}x^T \geqslant y\mathbf{U}x^T$.

Neka je $y \neq x$ mješovita strategija takva da je $x\mathbf{U}x^T = y\mathbf{U}x^T$, te pretpostavimo da je $x\mathbf{U}y^T \leqslant y\mathbf{U}y^T$. Konveksnom kombinacijom ove dvije jednakosti dobivamo da za svaki $\epsilon \in [0,1]$ vrijedi

$$x\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T \leqslant y\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom evolucijske stabilnosti.

Dokažimo sada i obratnu tvrdnju, pa u svrhu toga pretpostavimo da je x Nashov ekvilibrij te da jednakost (2.4) vrijedi za odgovarajuće y.

Uzmimo proizvoljnu mješovitu strategiju y. Budući da je x Nashov ekvilibrij, znamo da je $x\mathbf{U}x^T \geqslant y\mathbf{U}x^T$. Ako je $x\mathbf{U}x^T > y\mathbf{U}x^T$, tada je zbog neprekidnosti $x\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T > y\mathbf{U}(\epsilon y + (1-\epsilon)x)^T$ za sve dovoljno male ϵ.[3] S druge strane, ako je $x\mathbf{U}x^T = y\mathbf{U}x^T$, tada je po pretpostavci $x\mathbf{U}y^T > y\mathbf{U}y^T$ pa (2.3) vrijedi za sve $\epsilon \in \langle 0, 1]$. □

Pokažimo sada kako možemo iskoristiti prethodni teorem kako bismo pronašli evolucijske stabilne strategije kod bimatrične igre zadane bimatricom (2.1), odnosno matricom

$$\mathbf{U} = \begin{array}{c} \\ \text{A(gresivno)} \\ \text{P(asivno)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A(gresivno)} & \text{P(asivno)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Već smo spomenuli da je strategija $x = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ jedini simetrični Nashov ekvilibrij ove igre, pa je zbog prethodnog teorema to i jedini kandidat za evolucijski stabilnu strategiju. Pretpostavimo da je y takva da je $x\mathbf{U}x^T = y\mathbf{U}x^T$. Budući da je $\mathbf{U}x^T = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ (u skladu s općenitim fenomenom da ako drugi igrač igra po Nashovom ekvilibriju, korisnost prvog igrača ne ovisi o njegovoj odabranoj strategiji), vrijedi $x\mathbf{U}x^T = \frac{4}{3} = y\mathbf{U}x^T$ za sve $y \in S_1$. Dakle, trebamo provjeriti da je za sve $y \neq x$

$$x\mathbf{U}y^T > y\mathbf{U}y^T.$$

Koristeći da je $y_A + y_P = 1$, imamo

$$x\mathbf{U}y^T - y\mathbf{U}y^T = \frac{10}{3} - 3y_A - (2 + y_A - 3y_A^2) = \frac{4}{3} - 4y_A + 3y_A^2 = \tfrac{1}{3}(3y_A - 2)^2 > 0,$$

budući da bi za $3y_A - 2 = 0$ slijedilo $y = x$.

[3] Detaljnije, za funkciju $z \mapsto x\mathbf{U}z^T - y\mathbf{U}z^T$ znamo da je neprekidna, te da u točki x postiže pozitivnu vrijednost. Otuda slijedi da postoji i neka otvorena okolina točke x na kojoj je također pozitivna. Za dovoljno male ϵ, točka $\epsilon y + (1-\epsilon)x$ će se nalaziti u toj okolini.

Koristeći Propoziciju 2.4 i Teorem 2.6 sada možemo odrediti evolucijski stabilne strategije u svim 2×2 simetričnim bimatričnim igrama.

PROPOZICIJA 2.7. *Neka je simetrična 2×2 bimatrična igra zadana nekom generičkom 2×2 matricom $\mathbf{U}$, te neka je $\mathbf{U}'$ kao u (2.2).*

- *Ako je $u_1 < 0$ i $u_2 > 0$, tada je druga čista strategija (e_2) jedina evolucijski stabilna strategija.*
- *Ako je $u_1 > 0$ i $u_2 < 0$, tada je prva čista strategija (e_1) jedina evolucijski stabilna strategija.*
- *Ako je $u_1, u_2 > 0$, tada su obje čiste strategije jedine evolucijski stabilne strategije.*
- *Ako je $u_1, u_2 < 0$, tada je mješovita strategija $(u_2/(u_1+u_2), u_1/(u_1+u_2))$ jedina evolucijski stabilna strategija.*

DOKAZ. Prije svega, jednako kao što smo u komentarima prije Propozicije 2.4 zaključili da matrice $\mathbf{U}$ i $\mathbf{U}'$ daju iste Nashove ekvilibrije, koristeći Teorem 2.6 možemo zaključiti i da daju iste evolucijski stabilne strategije. Nadalje, koristeći isti teorem znamo i da je kandidate za evolucijski stabilne strategije dovoljno tražiti među Nashovim ekvilibrijima.

Dokaz ćemo prezentirati za slučaj $u_1, u_2 > 0$, a čitatelju ostavljamo da na sličan način analizira i preostale slučajeve. Prema Propoziciji 2.4, Nashovi ekvilibriji su obje čiste strategije (e_1 i e_2), te mješovita strategija $(u_2/(u_1+u_2), u_1/(u_1+u_2))$.

Promotrimo najprije kandidata $x = e_1$, te pretpostavimo u skladu s Teoremom 2.6 da je $x\mathbf{U}x^T = y\mathbf{U}x^T$. To daje $u_1 = u_1 y_1$, odnosno $y_1 = 1$, odakle slijedi $x = y$. Pretpostavke Teorema 2.6 su trivijalno zadovoljene pa je $x = e_1$ evolucijski stabilna strategija. Slično argumentiramo i za kandidata $x = e_2$.

Promotrimo sada kandidata $x = (u_2/(u_1+u_2), u_1/(u_1+u_2))$. Iz $x\mathbf{U}x^T = y\mathbf{U}x^T$ dobivamo da je

$$\frac{u_1 u_2}{u_1+u_2} = \frac{y_1 u_1 u_2}{u_1+u_2} + \frac{y_2 u_1 u_2}{u_1+u_2},$$

što je uvijek zadovoljeno, budući da je $y_1 + y_2 = 1$. Kako bismo ispitali vrijedi li (2.4) za sve $y \neq x$ uočimo da je

$$x\mathbf{U}y^T - y\mathbf{U}y^T = x_1 y_1 u_1 + x_2 y_2 u_2 - y_1^2 u_1 - y_2 u_2^2 = \frac{u_1 u_2}{u_1+u_2} - y_1^2 u_1 - y_2^2 u_2,$$

a to nije strogo veće od 0 za sve $y \neq x$ (npr. $y = (1,0)$). Zaključujemo da $(u_2/(u_1+u_2), u_1/(u_1+u_2))$ nije evolucijski stabilna strategija. □

ZADATAK 2.3. Dokažite preostale slučajeve.

Rješenje. Slučajevi $u_1 u_2 < 0$ su analogni argumentu za strategije e_1 i e_2 u (i).
Za slučaj $u_1, u_2 < 0$, imamo za $x = (u_2/(u_1+u_2), u_1/(u_1+u_2))$ i svaki $(y_1, 1-y_1)$,

$$x\mathbf{U}y^T - y\mathbf{U}y^T = x_1 y_1 u_1 + x_2 y_2 u_2 - y_1^2 u_1 - y_2 u_2^2 = \frac{u_1 u_2}{u_1+u_2} - y_1^2 u_1 - (1-y_1)^2 u_2.$$

Svođnjem na potpuni kvadrat ili rješavanjem kvadratne jednadžbe za y_1 dobivamo da je $x\mathbf{U}y^T - y\mathbf{U}y^T > 0$ za $y_1 \neq u_2/(u_1+u_2)$, pa je po Teoremu 2.6 x stabilna strategija.

ZADATAK 2.4. Definirajte funkcije korisnosti za matričnu igru kamen-škare-papir (2 igrača, 3 strategije; funkcija korisnosti nije jednoznačno određena).
Pronađite Nashove ekvilibrije (trebao bi postojati jedinstveni mješoviti Nashov ekvilibrij). Pronađite i evolucijski stabilne strategije.

Rješenje. Funkcija korisnosti dana je primjerice matricom

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tvrdimo (i) da je (x^*, x^*) za $x^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ jedini simetrični Nashov ekvilibrij i (ii) a x^* nije evolucijski stabilna strategija. Mješovite strategije prvog igrača označavamo sa $x = (x_1, x_2, x_3) \in S_1$

(dakle x je 3d vektor!). Za (i), prema Propoziciji 1.37 znamo da je

$$\begin{aligned} V &= \max_{x\in S_1} \underline{\Lambda}(x) = \max_{x\in S_1} \min_{j\in A_2} (x_1, x_2, x_3)u_{\cdot j} \\ &= \max_{x\in S_1} \min\{x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2\}. \end{aligned}$$

Maksimum minimuma sa postiže u $x_1 = x_2 = x_3$; u protivnom je jedna od triju komponenti $x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2$ negativna, pa je $\{x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2\} < 0$.[4]
Dakle, $\max_{x\in S_1} \underline{\Lambda}(x) = 0$ i jedina optimalna strategija prvog igrača je $x^* = (1/3, 1/3, 1/3)$. Igra je simetrična (matrica korisnosti drugog igrača je $\mathbf{U}^T$, pa je i i jedina optimalna strategija drugog igrača $x^* = (1/3, 1/3, 1/3)$. Dakle (x^*, x^*) je jedini Nashov ekvilibrij.

Za (ii), primijetimo da bilo koji $y \in S_1$ zadovoljava

$$x\mathbf{U}x^T = y\mathbf{U}x^T.$$

No, za $y = (1, 0, 0)$, imamo $x\mathbf{U}y^T = 0 = y\mathbf{U}y^T$.

2.3. Opcionalno: Dinamika replikacije

N*apomena za 2025./2026.* Sljedeće gradivo (pa time i odgovarajući zadaci) se neće obrađivati ove akademske godine.

U ovom ćemo dijelu predstaviti jedan jednostavni model razvoja populacije odnosno udjela njenih različitih grupa jedinki. Dakle, kao i u ostatku ovog poglavlja, mješovite strategije predstavljat će udjele tih grupa u cijeloj populaciji. U primjeru kojim smo započeli ovo poglavlje imali smo dvije grupe – jednu su činile jedinke koje su se ponašale agresivno, a drugu jedinke koje su se ponašale pasivno. Ti udjeli (mješovite strategije) mijenjat će se kroz vrijeme, a ključna ideja modela je da je brzina promjene udjela neke grupe u cijeloj populaciji proporcionalna s time koliko je ta grupa *snažna* odnosno koliko njena očekivana korisnost odudara od prosječne.

Kao i prije, neka je simetrična bimatrična igra zadana nekom $m \times m$ matricom $\mathbf{U}$. Neka je $x = x(t)$ mješovita strategija (vektor udjela grupa unutar populacije) u vremenskom trenutku t. Očekivana korisnost jedinki iz grupe i je očito $e_i\mathbf{U}x^T$, pa je prosječna korisnost u populaciji jednaka

$$\sum_{i=1}^{m} x_i e_i \mathbf{U}x^T = x\mathbf{U}x^T.$$

Kod **dinamike replikacije** uzimamo da se mješovite strategije mijenjaju u skladu s diferencijalnim jednadžbama

$$x_i' = (e_i\mathbf{U}x^T - x\mathbf{U}x^T)x_i \tag{2.5}$$

za svaku grupu $i = 1, \ldots, m$. Postojanje i jedinstvenost rješenja može se izvesti primjerice iz Picardovog teorema. Kako bismo dublje analizirali dinamiku koju inducira (2.5) potrebni su nam napredni alati teorije diferencijalnih jednadžbi i dinamičkih sustava. Mi ćemo se stoga zadržati na nekim osnovnim konceptima.

Zadatak. (a) Dokažite da ako početni uvjet zadovoljava $x_1(0) + \cdots + x_m(0) = 1$, onda rješenje sustava (2.5) zadovoljava

$$x_1(t) + \cdots + x_m(t) = 1$$

[4] Alternativni argument: supstituiramo $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, pa promatramo grafove funkcija $f(x_1, x_2) = -1 + 2x_2 + x_3, g(x_1, x_2) = 1 - 2x_1 - x_2, h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. One se sijeku u točki $x_1 = x_2 = 1/3$, u protivnom je jedna od tih funkcija negativna. Dakle min max je u $x_1 = x_2 = 1/3$.

za svaki t.
(b) Dokažite da ako je x stacionarna točka sustava (2.5) (tj. $x' = 0$) sa $x_i > 0$ za $i \in [m]$, onda je x simetrični Nashov ekvilibrij.
(c) Ako je x simetrični Nashov ekvilibrij, mora li biti i stacionarna točka.

Označimo, kao i inače, skup mješovitih strategija (prvog igrača) s S_1. Za svako početno stanje $x(0) = x^0 \in S_1$, diferencijalne jednadžbe (2.5) daju jednu trajektoriju $[0, +\infty\rangle \ni t \mapsto x(t)$ u S_1.

Napomena 2.8. Uočimo da jednostavnija matrica $\mathbf{U}'$ definirana kao u (2.2) daje istu dinamiku replikacije kao i matrica $\mathbf{U}$. Doista, to slijedi direktno iz (2.5) i činjenice da je

$$e_i \mathbf{U} x^T - x\mathbf{U}x^T = e_i \mathbf{U}' x^T - x\mathbf{U}'x^T,$$

koju dobivamo iz Leme 2.1.

Jedan od ključnih pojmova pri analizi dinamičkih sustava je pojam stabilnosti.

Definicija 2.9. Za stanje $\overline{x} \in S_1$ ćemo reći da je **asimptotski stabilno** ako ima otvorenu okolinu B^* takvu da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \overline{x}$ za sve $x^0 \in B^*$.

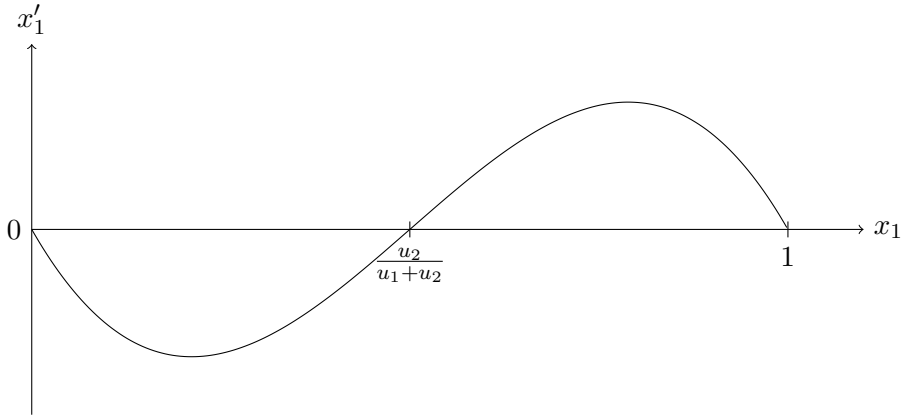
Budući da je analiza dinamičkih sustava bogata, ali i podosta kompliciranа teorija, koncentrirat ćemo se na simetrične bimatrične igre zadane nekom generičkom 2×2 matricom. Propozicija koju ćemo pokazati daje naznaku čvrste veze između dinamičke stabilnosti i prethodno uvedenih evolucijski stabilnih strategija.

Propozicija 2.10. *Neka je simetrična bimatrična igra zadana generičkom 2×2 matricom $\mathbf{U}$, te neka je x neka njena mješovita strategija. Tada je x evolucijski stabilna ako i samo je x asimptotski stabilno stanje dinamike replikacije.*

Dokaz za slučaj $u_1, u_2 > 0$. Zbog Napomene 2.8, dovoljno je raditi s matricom $\mathbf{U}'$
Budući da je x_2 jedinstveno određen s x_1 (jer je $x_1 + x_2 = 1$), dovoljno je promatrati (2.5) za $i = 1$. Ukoliko radimo s matricom $\mathbf{U}'$, jednadžba dinamike replikacije se onda svodi na

$$x_1' = (x_1 u_1 - (1 - x_1)u_2)(1 - x_1)x_1$$

Opet ćemo se posebno pozabaviti samo sa slučajem $u_1, u_2 > 0$, dok preostale slučajeve prepuštamo čitatelju. Skicirajmo x_1' kao funkciju od x_1.



Uočavamo tri stacionarne točke – 0, 1 i $\overline{x}_1 = u_2/(u_1 + u_2)$. Uočimo da ako krećemo iz nekog stanja $x_1^0 \in [0, \overline{x}_1\rangle$, vrijednost x_1 će padati (budući da je $x_1' < 0$). Po Newton-Leibnizovoj formuli imamo

$$x_1(t) - x_1(0) = \int_0^t x_1'(s)\, ds.$$

Odavde je jasno da $x_1(t) \to 0$, budući da bi u suprotnom desna strana jednakosti težila u $-\infty$ kada $t \to \infty$. Dakle, možemo zaključiti da je 0 asimptotski stabilno stanje.

Slično, ako krećemo iz nekog stanja $x_1^0 \in \langle \overline{x}_1, 1]$, vrijednost x_1 će rasti (budući da je $x_1' > 0$) prema 1. Iz toga pak vidimo da je 1 asimptotski stabilno stanje. Konačno, ako krećemo iz točke $x_1^0 = \overline{x}_1$, u toj točki ćemo i ostati, ali to stanje nije asimptotski stabilno – ako uzmemo neku malu okolinu oko točke $\overline{x}_1$ i krenemo iz bilo koje točke različite od $\overline{x}_1$, trajektorija će konvergirati prema 0 ili 1.

Usporedbom s Propozicijom 2.7 vidimo da su asimptotski stabilna stanja ujedno i evolucijski stabilne strategije. □

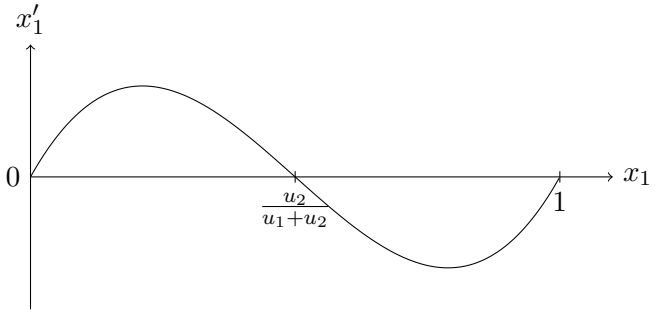
ZADATAK. Dokažite preostale slučajeve.

Rješenje.

Neka je $u_1 > 0$ i $u_2 > 0$. Tada je $x_1' > 0$ osim u stacionarnim točkama 0 i 1. Argument iz prvog slučaja povlači da je 1 jedino asimptotski stabilno stanje.

Za slučaj $u_2 > 0$ i $u_1 > 0$, možemo zamijeniti oznake / imena dviju strategija i time je tvrdnja svedena na prethodni slučaj.

Preostaje slučaj $u_1, u_2 < 0$. Skicirajmo x_1' kao funkciju od x_1.



Uočavamo tri stacionarne točke – 0, 1 i $\overline{x}_1 = u_2/(u_1 + u_2)$. Uočimo da ako krećemo iz nekog stanja $x_1^0 \in [0, \overline{x}_1\rangle$, vrijednost x_1 će rasti (budući da je $x_1' > 0$), pa 0 nije asimptotski stabilno stanje. Po istom argumentu, 1 nije asimptotski stabilno stanje.

Ako krećemo iz $x_1^0 \in \langle 0, \overline{x}_1\rangle$, iz Newton-Leibnizove formule dobivamo da je $x_1(t)$ strogo rastuća funkcija dok god je $x_1(t) < \overline{x}_1$. Nadalje, $x_1(t) \leqslant \overline{x}_1$ za svaki t, jer ako za neki t vrijedi jednakost, onda je $x_1(t') = \overline{x}_1(t)$ za sve $t' \geqslant t$ (koristeći jedinstvenost rješenja diferencijalne jednadžbe). Dakle, $x_1(t)$ je strogo rastuća funkcija ograničena s $\overline{x}_1$, pa vrijedi $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \overline{x}_1$.

[*Napomena.* Za okvire ovog kolegija nije potreban tako detaljni argument, dovoljno je primietiti da je $\overline{x}_1$ stacionarna točka i smjerove derivacije oko nje.]

POGLAVLJE 3

Ekstenzivne igre

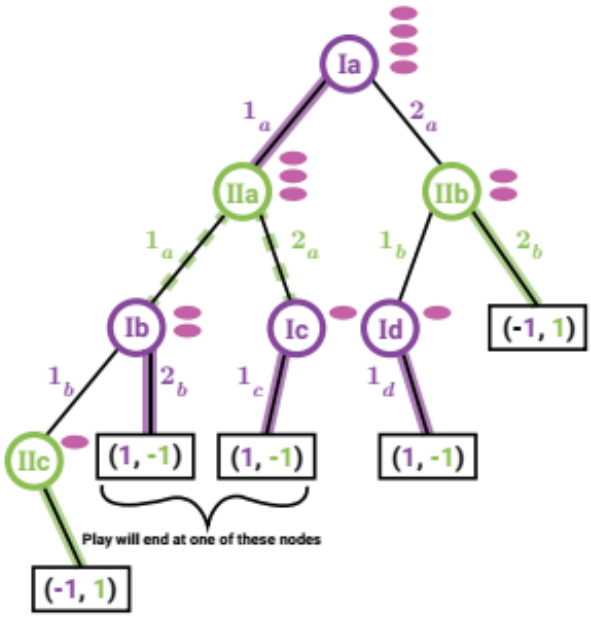
3.1. Ekstenzivne igre s potpunim informacijama

Do sada smo se bavili isključivo strateškim igrama, a one su imale svojstvo da je svaki igrač donio samo jednu odluku, ne znajući za odluke preostalih igrača. Jednom kada su bile poznate odluke (tj. odabiri strategija) svih igrača igra je bila gotova i za svakog igrača se znao njegov dobitak.

Pokažimo sada primjer jedne igre u kojoj igrači neće u isto vrijeme donositi odluke. Takve ćemo igre prikazivati preko stabla kao što pokazuje sljedeći dijagram.

Primjer 3.1 (Igra oduzimanja). Igrači naizmjence uzimaju 1 ili 2 novčića iz hrpe. Pobjednik je igrač koji izvuče zadnji novčić.

Koji igrač ima pobjedničku strategiju?



Definirat ćemo poseban slučaj igre *s potpunim informacijama* (što uključuje primjerice šah i 'Čovječe, ne ljuti se') jer je u općenitom slučaju notacija prilično ekstenzivna. Budući da prvo diskutiramo poseban slučaj, a tek nakon toga generalizaciju, neizbježno je ponavljanje između ovog i sljedećeg poglavlja.

Prije definicije, čitatelja ćemo podsjetiti da je **usmjereno stablo s korijenom** x_0 uređeni par $T = (X, E)$, takav da

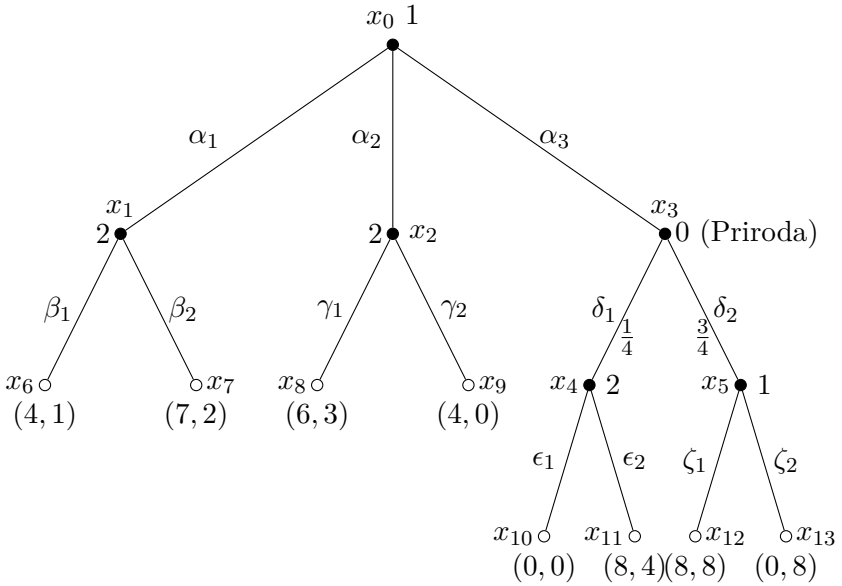
- X je konačan skup s bar dva elementa čije elemente nazivamo **vrhovima**.
- E je podskup skupa $X \times X$ čije elemente nazivamo **(usmjerenim) bridovima**. Za brid (x, y) reći ćemo da izlazi iz x i ulazi u y.
- Vrijedi da je $x_0 \in X$ i taj vrh nazivamo **korijenom**, te on ima svojstvo da za svaki $x \in X \setminus \{x_0\}$ postoji jedinstveni **put** od x_0 do x, odnosno niz bridova (x_0, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{k-1}, x_k),(x_k, x). U x_0 ne ulazi niti jedan brid.

Vrhove iz kojih ne izlazi niti jedan brid nazivat ćemo **završnim vrhovima** (ili listovima).

Definicija 3.2. **Ekstenzivna igra s potpunim informacijama** s n igrača je uređena četvorka $\Gamma = (T, P, \tau, u)$ sa sljedećim svojstvima.

- $T = (X, E)$ je usmjereno stablo s korijenom x_0 i skupom završnih vrhova Z.
- $P\colon X \setminus Z \to \{\mathbf{0}, 1, \ldots, n\}$ je funkcija koja svakom nezavršnom vrhu pridružuje ili igrača ili Prirodu (koju označavamo kao igrača 0). U prvom slučaju taj ćemo vrh nazivati **vrhom odluke**, a u drugom **slučajnim vrhom**.
- Bridove iz pojedinog vrha x nazivamo **potezima** u x.
- $\tau = (\tau_x)_{x \in P^{-1}(0)}$ svakom slučajnom vrhu pridružuje vjerojatnosnu distribuciju na skupu bridova koji iz njega izlaze. Pretpostavljamo da su svim bridovima dane pozitivne vjerojatnosti.
- $u = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ svakom igraču i pridružuje funkciju korisnosti $u_i\colon Z \to \mathbf{R}$.

Slijedi primjer ekstenzivne igre s potpunim informacijama.



Slika 1.

Koje su strategije dostupne igračima u igri sa Slike 1? Prvi igrač može analizirati igru i doći do zaključka da će u vrhu x_0 igrati, na primjer, potez α_3, a u vrhu x_5 potez ζ_1. Reći ćemo da se u tom slučaju prvi igrač odlučio za strategiju $\alpha_3\zeta_1$. Naravno, $\alpha_3\zeta_1$ nije jedina strategija prvog igrača – prvi igrač ima ukupno $6 = 3 \cdot 2$ mogućih strategija: tri za vrh x_0 i dvije za vrh x_5.

Napominjemo da, na primjer, α_1 sam po sebi *nije* strategija prvog igrača, budući da nedostaje odabir poteza za vrh x_5 iako je taj odabir u ovom slučaju potpuno nebitan. Koliko ima strategija drugog igrača?

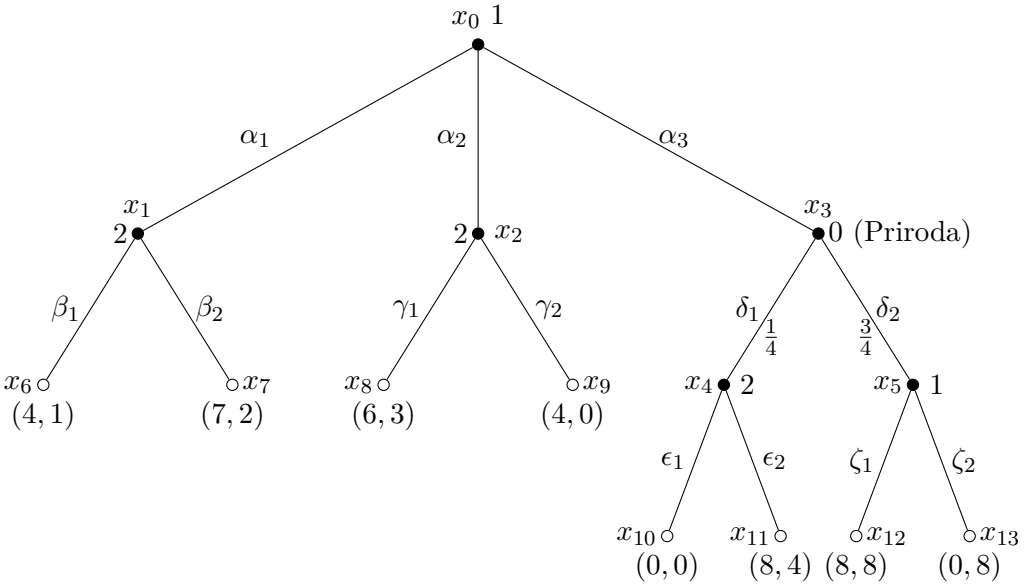
Uočimo da, jednom kada su nam poznate strategije na koje su se igrači odlučili, igru možemo *odvrtiti* od početka do kraja tako da u svakom vrhu pratimo potez koji je za pripadni skup informacija odabrao odgovarajući igrač.

Situacija je nešto suptilnija ukoliko se igrači odluče na strategije koje igru dovode i u slučajne vrhove. Na primjer, pretpostavimo da je prvi igrač odabrao strategiju $\alpha_3\zeta_1$, a drugi $\beta_1\gamma_1\epsilon_2$. Vidimo da će s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$ igra završiti u vrhu x_{11} i time prvom i drugom igraču donijeti korisnosti 8 i 4, a s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$ u vrhu x_{12} i time oba igrača donijeti korisnosti 8. Otuda možemo reći da je očekivana korisnost prvog igrača, uz navedeni strateški profil, jednaka $\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 8$, a drugog $\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 7$.

Dakle, općenito će odabir strategija svih igrača (odnosno, strateški profil) inducirati vjerojatnosnu distribuciju na skupu završnih vrhova iz koje onda možemo izračunati očekivane korisnosti igrača.

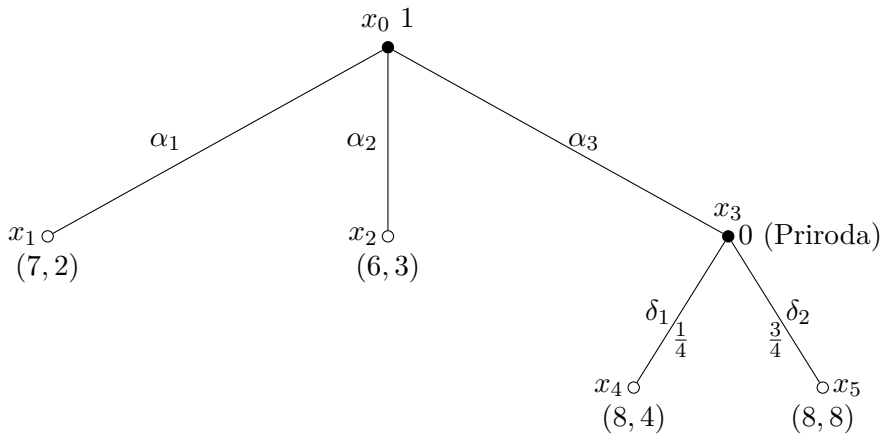
Uočimo da na upravo opisani način svakoj ekstenzivnoj igri možemo pridružiti pripadnu stratešku igru. Ovu korespondenciju ćemo detaljnije definirati u sljedećem poglavlju. **(Čisti) Nashov ekvilibrij** ekstenzivne igre je Nashov ekvilibrij njoj pridružene strateške igre.

Pokažimo sada na primjeru kako možemo tzv. metodom **indukcije unatrag** pronaći jedan Nashov ekvilibrij proizvoljne igre s potpunim informacijama.



Slika 2.

Pretpostavimo da se igra našla u vrhu x_1, te da drugi igrač odlučuje između poteza β_1 i β_2. Promatrajući korisnosti koje ga očekuju u svakom od ta dva poteza (1 u slučaju β_1 i 2 u slučaju β_2), drugi igrač zaključuje da mu je potez β_2 pametniji izbor. Slično, u vrhu x_2, drugi igrač zaključuje da mu je pametniji potez γ_1, a u vrhu x_4 potez ϵ_2. S druge strane, prvi igrač na sličan način zaključuje da mu je u vrhu x_5 bolji potez ζ_1. Na ovaj smo način početnu igru sveli na igru prikazanu na Slici 3

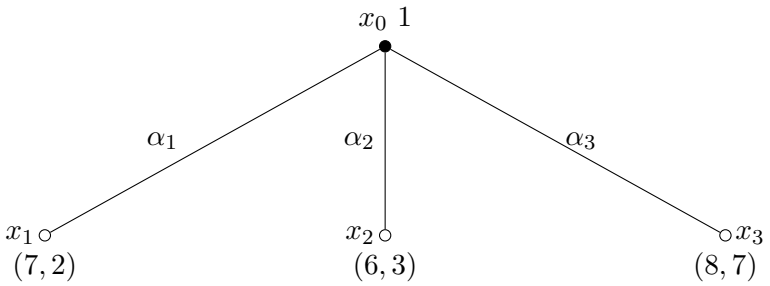


Slika 3.

Slično sada možemo analizirati i vrh x_3. Budući da se radi o slučajnom vrhu, njega možemo jednostavno zamijeniti sa završnim vrhom kod kojeg će vrijednosti funkcija korisnosti biti očekivanje

korisnosti temeljeno na korisnostima u vrhovima x_4 i x_5

$$\tfrac{1}{4} \cdot (8,4) + \tfrac{3}{4}(8,8) = (8,7).$$



Slika 4.

Konačno, gledamo vrh x_1 i vidimo da je prvom igraču (koji u njemu odlučuje) najpametnije odabrati potez α_3.

Prikazanim postupkom došli smo do strategije $\alpha_3\zeta_1$ za prvog igrača, te $\beta_2\gamma_1\epsilon_2$ za drugog igrača. Lako se možemo uvjeriti da ovaj par strategija čini Nashov ekvilibrij.

Isti postupak možemo provesti za proizvoljnu ekstenzivnu igru s potpunim informacijama, pa se ispostavlja da je primjerice šah strogo određena igra (v. Poglavlje 3.4). No, prije dokaza moramo formalizirati potrebne definicije.

Na kraju poglavlja dajemo još jedan primjer.

Primjer 3.3. Ivica i Marica sjede za stolom na kojem se nalazi 2025 kamenčića. Na početku igre Ivica odabire broj $n_1 \in \{1,2\}$ te sa stola uklanja n_1 kamenčića. Nakon toga Marica odabire broj $n_2 \in \{1,2\}$ te sa stola uklanja n_2 kamenčića. Igru nastavlja Ivica koji odabire broj $n_3 \in \{1,2\}$ te sa stola uklanja n_3 kamenčića i tako dalje. Pobjednik igre je onaj igrač koji sa stola ukloni posljednji kamenčić. Koji od igrača pametnom igrom može osigurati svoju pobjedu?

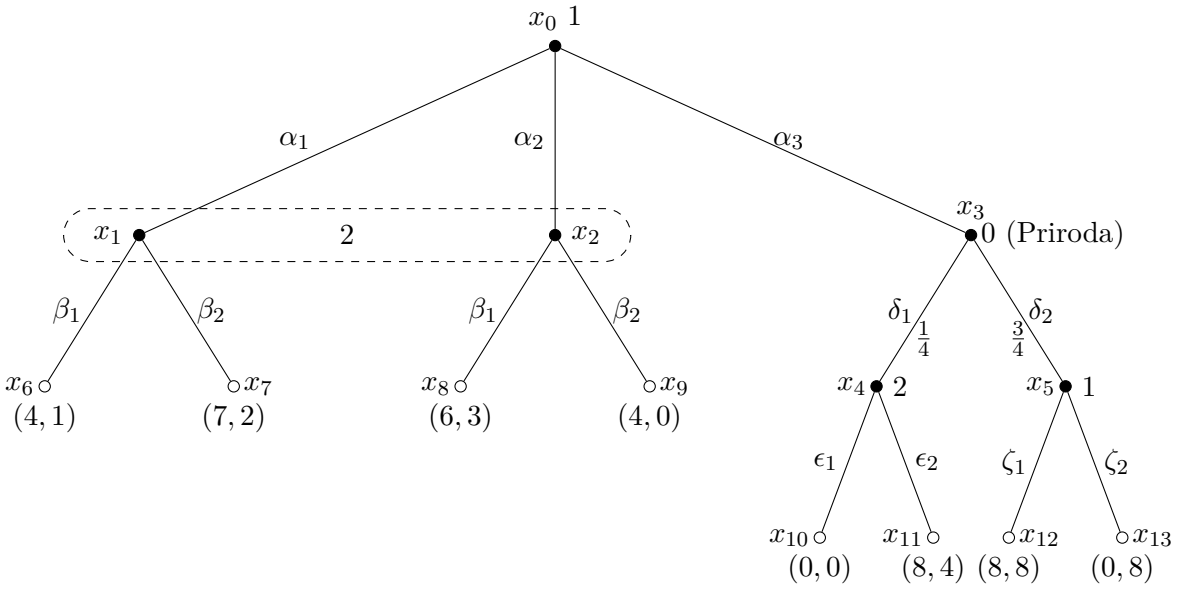
Odgovor. Marica ima dobitnu strategiju. Naime, ako na početku na stolu imamo k kamenčića, onda Marija pobjeđuje akko je k djeljiv s 3, što se može ustanoviti indukcijom.

3.2. Općenita definicija

Pokažimo sada primjer jedne igre u kojoj igrači nemaju *potpune informacije*. Promotrimo Sliku 5.

Vrhovi u stablu označavaju različita stanja tijekom igre. Listove stabla $(x_6, \ldots, x_{13})$ nazivat ćemo *završnim vrhovima* budući da oni označavaju moguće završetke igre. U svakom od njih naznačene su korisnosti igrača. Preostale vrhove dijelit ćemo na *vrhove odluke* i *slučajne vrhove*. U vrhovima odluke $(x_0, x_1, x_2, x_4, x_5)$ jedan od igrača odabire između nekoliko poteza koji ga vode na druge vrhove stabla, odnosno druga stanja u igri. Na dijagramu je za svaki vrh odluke naznačeno koji od igrača odlučuje o potezu. U slučajnim vrhovima (x_3) također se događa grananje, ali ono, za razliku od vrhova odluke, nije dirigirano odlukom nekog od igrača već slučajnošću. Reći ćemo da u takvim vrhovima odluku donosi Priroda koju ćemo često smatrati jednim dodatnim igračem kojeg ćemo označavati s 0.

Igru započinje prvi igrač i on na raspolaganju ima tri moguća poteza – α_1, α_2 i α_3. Potezi α_1 i α_2 vode ga redom u vrhove x_1 i x_2. Uočimo da su ta dva vrha na dijagramu objedinjena u jedan skup za kojeg smo naznačili da pripada drugom igraču. To znači da u ta dva vrha drugi igrač odlučuje o idućem potezu, ali da mu nije poznato koji od njih reprezentira trenutno stanje igre (drugim riječima, drugom igraču je poznato samo da se prvi igrač odlučio za potez α_1 ili α_2, ali ne i koji točno od njih). U skladu s tim, drugi igrač u stanjima x_1 i x_2 ima na raspolaganju ista dva poteza – β_1 i β_2. Ukoliko se, na primjer, drugi igrač odluči za potez β_1, a prije njega je prvi igrač odigrao potez α_2, igra završava



Slika 5.

u završnom vrhu x_8 te prvi igrač iz nje izlazi s korisnosti 6, a drugi igrač s korisnosti 3. Ako se pak prvi igrač na početku odlučio za potez α_3, sljedeća nastupa Priroda koja na raspolaganju ima dva poteza – δ_1 i δ_2. To znači da će se, nakon što prvi igrač odigra potez α_3, igra nastaviti iz stanja x_4 s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$ ili iz stanja x_5 s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$.

Kao što ovaj primjer pokazuje, ekstenzivne igre sastoje se od mnogo elemenata, što donekle opravdava i narednu iznimno kompliciranu definiciju.

Definicija 3.4. **Ekstenzivna igra** s n igrača je uređena šestorka $\Gamma = (T, P, \mathcal{H}, \mathcal{C}, \tau, u)$ takva da

- $T = (X, E)$ je usmjereno stablo s korijenom x_0 i skupom završnih vrhova Z.
- $P\colon X \setminus Z \to \{0, 1, \ldots, n\}$ je funkcija koja svakom nezavršnom vrhu pridružuje ili igrača ili Prirodu (koju označavamo kao igrača 0). U prvom slučaju taj ćemo vrh nazivati **vrhom odluke**, a u drugom **slučajnim vrhom**.
- $\mathcal{H} = (H_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ svakom igraču i pridružuje particiju H_i skupa $P^{-1}(i)$, odnosno vrhova odluke u kojima je taj igrač na potezu. Skupove $h \in H_i$ nazivamo **skupovima informacija igrača** i te za svaki takav skup h pretpostavljamo da sa svakim putom u T dijeli najviše jedan vrh, te da svi vrhovi u h imaju jednak broj izlaznih bridova.
- $\mathcal{C} = (C_h)_{h \in H}$, pri čemu je $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$, svakom $h \in H$ pridružuje particiju skupa bridova koji izlaze iz vrhova u h. Particija C_h je takva da za svaki vrh $x \in h$ i svaki $c \in C_h$, c sadrži točno jedan brid koji izlazi iz x. Skupove $c \in C_h$ nazivamo **potezima** u h. Pretpostavljamo da je $|C_h| \geqslant 2$ za sve h.
- $\tau = (\tau_x)_{x \in P^{-1}(0)}$ svakom slučajnom vrhu pridružuje vjerojatnosnu distribuciju na skupu bridova koji iz njega izlaze. Pretpostavljamo da su svim bridovima dane pozitivne vjerojatnosti.
- $u = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ svakom igraču i pridružuje funkciju korisnosti $u_i\colon Z \to \mathbf{R}$.

Pokažimo sada kako se ova definicija odražava na primjer kojim smo započeli ovo poglavlje.

Prije svega, imamo usmjereno stablo T sa skupom vrhova $X = \{x_0, \ldots, x_{13}\}$, korijenom x_0 i skupom E od 13 bridova koje ostavljamo čitatelju da zapiše. Skup završnih vrhova je $Z = \{x_6, \ldots, x_{13}\}$. Nadalje, za funkciju $P\colon \{x_0, \ldots, x_5\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$P(x_0) = P(x_5) = 1, \quad P(x_1) = P(x_2) = P(x_4) = 2, \quad P(x_3) = 0.$$

Skupovi H_1 i H_2 sastoje se od skupova informacija prvog i drugog igrača

$$H_1 = \{\{x_0\}, \{x_5\}\}, \quad H_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_4\}\}.$$

Većina skupova $h \in H_1 \cup H_2$ je jednočlana, pa je samim time particija C_h za njih trivijalna. Na primjer,

$$C_{\{x_0\}} = \{\{(x_0, x_1)\}, \{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_3)\}\}.$$

Zanimljivija je situacija jedino za $\{x_1, x_2\}$, jedini višečlani skup informacija. U tom je slučaju

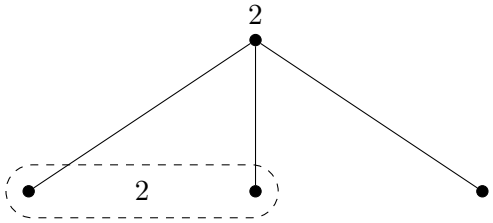
$$C_{\{x_1,x_2\}} = \{\{(x_1, x_6), (x_2, x_8)\}, \{(x_1, x_7), (x_2, x_9)\}\}.$$

Uočimo da smo potez $\{(x_1, x_6), (x_2, x_8)\}$ na dijagramu označili s β_1, a $\{(x_1, x_7), (x_2, x_9)\}$ s β_2.

x_3 je slučajni vrh i za njega imamo vjerojatnosnu distribuciju τ_{x_3} koja bridu (x_3, x_4) pridružuje vjerojatnost $\frac{1}{4}$, a bridu (x_3, x_5) vjerojatnost $\frac{3}{4}$. Kraće zapisujemo $\tau_{x_3} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Konačno, imamo i funkcije korisnosti u_1 i u_2 koje svakom završnom vrhu pridružuju korisnost za odgovarajućeg igrača. Tako je, na primjer, $u_1(x_6) = 4$ i $u_2(x_8) = 3$.

Najčešće se promatraju igre u kojima svaki od igrača ima potpuno prisjećanje što je učinio u prošlosti. Tako, na primjer, situacije kao na donjem dijagramu nisu dopuštene.



Definicija 3.5. Za igrača i ekstenzivne igre Γ reći ćemo da ima **potpuno prisjećanje** ukoliko za svaki skup informacija $h \in H_i$ i sve vrhove $x, y \in h$ vrijedi da se svi potezi igrača i koji se pojavljuju na putu od korijena do vrha x ujedno pojavljuju i na putu od korijena do vrha y. Za Γ ćemo reći da ima svojstvo potpunog prisjećanja ako svaki od igrača koji je igraju ima potpuno prisjećanje.

Igre s potpunim informacijama, obrađene u prethodnom poglavlju, su poseban slučaj gdje svaki igrač u svakom trenutku zna točno stanje u kojem se igra trenutno nalazi.

Definicija 3.6. Za ekstenzivnu igru reći ćemo da je s **potpunim informacijama** ukoliko je za sve igrače i particija H_i diskretna, odnosno ukoliko za sve $h \in H_i$ vrijedi $|h| = 1$. U suprotnom ćemo reći da se radi o igri s **nepotpunim informacijama**.

Šah, križić-kružić i *Čovječe, ne ljuti se* primjeri su igara s potpunim informacijama, dok je većina kartaških igara (npr. poker) s nepotpunim informacijama budući da je igračima nepoznato s kojim kartama raspolažu njihovi suparnici.

3.3. Nashov ekvilibrij

Svaki igrač koji igra neku ekstenzivnu igru mora razmišljati jedino o tome kako će postupiti u situacijama u kojima je na njega red – drugim riječima, za koje će se poteze odlučiti u svojim skupovima informacija. Na primjer, u igri sa Slike 5, pretpostavimo da si je prvi igrač skicirao prikazano stablo te potom uočio da su x_0 i x_5 jedini vrhovi u kojima će on odlučivati o daljnjem tijeku igre. Oba ta vrha čine zasebni skup informacija. Prvi igrač tada može analizirati igru i doći do zaključka da će u vrhu x_0 igrati, na primjer, potez α_3, a u vrhu x_5 potez ζ_1. Reći ćemo da se u tom slučaju prvi igrač odlučio za strategiju $\alpha_3\zeta_1$. Budući da igra kreće iz korijena (x_0), odluka prvog igrača vezana za taj vrh uvijek će biti relevantna za daljnji tijek igre. S druge strane, moguće je da igra neće niti doći do vrha x_5 pa

će u tom slučaju biti potpuno nebitno što je prvi igrač odlučio da bi napravio kad bi igra do njega došla. Naravno, $\alpha_3\zeta_1$ nije jedina strategija prvog igrača – prvi igrač ima ukupno $6 = 3 \cdot 2$ mogućih strategija: tri za vrh x_0 (preciznije, skup informacija $\{x_0\}$) i dvije za vrh x_5 (skup informacija $\{x_5\}$). Napominjemo da, na primjer, α_1 sam po sebi *nije* strategija prvog igrača, budući da nedostaje odabir poteza za vrh x_5 iako je taj odabir u ovom slučaju potpuno nebitan – odigravanje poteza α_1 odmah otklanja ikakvu mogućnost da će igra doći do vrha x_5.

S druge strane, strategije drugog igrača sastoje se od odabira poteza za skupove informacija $\{x_1, x_2\}$ i $\{x_4\}$. Tako je, na primjer, $\beta_1\epsilon_2$ jedan primjer njegove strategije.

Uočimo da, jednom kada su nam poznate strategije na koje su se igrači odlučili, igru možemo *odvrtiti* od početka do kraja tako da u svakom vrhu pratimo potez koji je za pripadni skup informacija odabrao odgovarajući igrač. Na taj način dolazimo do jednog od završnih vrhova u kojem potom iščitavamo korisnosti za svakog od igrača. Na primjer, pretpostavimo da se prvi igrač odlučio za strategiju $\alpha_1\zeta_1$, a drugi na strategiju $\beta_2\epsilon_1$. Igra kreće iz x_0 te otuda pratimo potez α_1 budući da je on dio strategije prvog igrača. To nas dovodi do vrha x_1. Taj vrh je dio skupa informacija $\{x_1, x_2\}$ drugog igrača, i on se odlučio da će, kad se nađe u tom skupu informacija, igrati potez β_2 što igru dovodi do završnog vrha x_7. Prvi igrač stoga završava s korisnosti 7, a drugi s korisnosti 2. Uočimo da je za tijek igre bilo potpuno nebitno to što je prvi igrač imao spremnu odluku za odigravanje poteza ζ_1 u vrhu x_5, kao i što je drugi igrač imao spremnu odluku za odigravanje poteza ϵ_1 u vrhu x_4.

Kao i ranije, situacija je nešto suptilnija ukoliko se igrači odluče na strategije koje igru dovode i u slučajne vrhove. Na primjer, pretpostavimo da je prvi igrač odabrao strategiju $\alpha_3\zeta_1$, a drugi $\beta_1\epsilon_2$. Tada lako vidimo da će s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$ igra završiti u vrhu x_{11} i time prvom i drugom igraču donijeti korisnosti 8 i 4, a s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$ u vrhu x_{12} i time oba igrača donijeti korisnosti 8. Otuda možemo reći da je očekivana korisnost prvog igrača, uz navedeni strateški profil, jednaka $\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 8$, a drugog $\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 7$.

Dakle, općenito će odabir strategija svih igrača (odnosno, strateški profil) inducirati vjerojatnosnu distribuciju na skupu završnih vrhova iz koje onda možemo izračunati očekivane korisnosti igrača.

Uočimo da na upravo opisani način svakoj ekstenzivnoj igri možemo pridružiti pripadnu stratešku igru.

Definicija 3.7. **Čista strategija** igrača i u ekstenzivnoj igri je proizvoljno preslikavanje a_i koje svakom skupu informacija $h \in H_i$ pridružuje neki potez $c \in C_h$. Skup svih čistih strategija igrača i označavamo s A_i.

Definicija 3.8. **Strateška igra pridružena ekstenzivnoj igri** Γ je strateška igra $(A_1 \times \cdots \times A_n, (u_1, \ldots, u_n))$, pri čemu je, za svaki i, A_i skup čistih strategija igrača i u ekstenzivnoj igri Γ, a u_i funkcija korisnosti igrača i definirana na sljedeći način. Za proizvoljni strateški profil $a \in A_1 \times \cdots \times A_n$, neka je p_a vjerojatnosna distribucija na skupu završnih vrhova Z koju taj strateški profil inducira – drugim riječima, $p_a(z)$ je vjerojatnost da će igra, prateći strateški profil a, završiti u završnom vrhu z. Tada je[1]

$$u_i(a) = \sum_{z \in Z} p_a(z) u_i(z).$$

Definicija 3.9. **(Čisti) Nashov ekvilibrij** ekstenzivne igre je Nashov ekvilibrij njoj pridružene strateške igre.

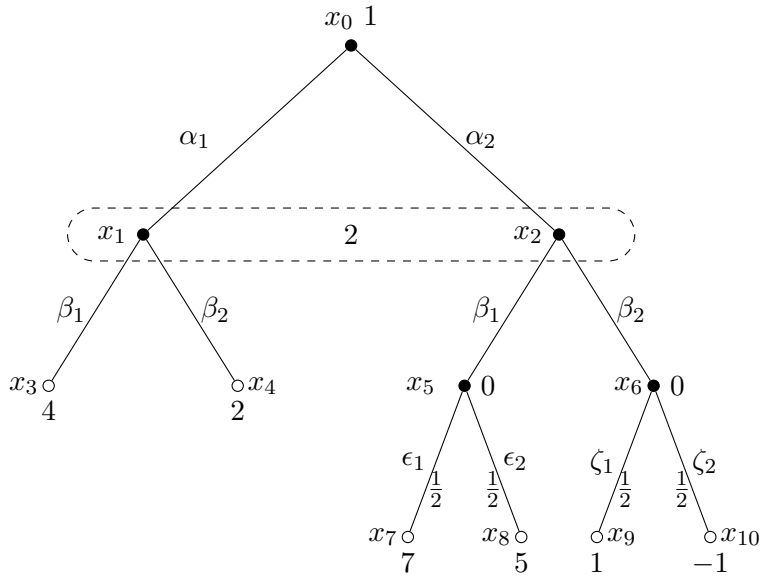
Sljedeći primjer ilustrira nalaženje spomenute strateške igre i pripadnih Nashovih ekvilibrija.

Primjer 3.10. Za sljedeću ekstenzivnu igru sa dva igrača sa sumom 0, nacrtajte stablo i opišite odgovarajuću stratešku igru. Odredite vrijednost te igre i optimalne strategije oba igrača.

[1] u_i na desnoj strani jednakosti se referira na funkciju korisnosti u ekstenzivnoj igri, a na lijevoj strani na funkciju korisnosti strateške igre koju upravo definiramo.

Prvi igrač bira potez α_1 ili α_2, i njegov izbor je nepoznat drugom igraču. Zatim drugi igrač bira potez β_1 ili β_2. U slučaju $\alpha_1\beta_1$ i $\alpha_1\beta_2$, korisnost prvog igrača je redom 4 i 2. U slučaju $\alpha_2\beta_1$ i $\alpha_2\beta_2$, nastupa priroda. Tada prvi igrač, u slučaju $\alpha_2\beta_1$, dobiva korisnost 7 ili 5 s vjerojatnošću 1/2. U slučaju $\alpha_2\beta_2$ on dobiva korisnost 1 ili -1 s vjerojatnošću 1/2.

Rješenje.



Slika 6.

Odgovarajuća strateška igra ima matricu korisnosti (prvog igrača)

$$U = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vidimo da je (α_1, β_2) čisti Nashov ekvilibrij ove igre i da je vrijednost igre 2. Nema drugih Nashovih ekvilibrija, što možemo vidjeti primjerice iz činjenice da drugi stupac strogo dominira prvoga.

3.4. Potpuni čisti ekvilibrij po podigrama

Prisjetimo se igre sa Slike 1. Indukcijom unatrag smo pronašli Nashov ekvilibrij $(\alpha_3\zeta_1, \beta_2\gamma_1\epsilon_2)$. No, ovaj ekvilibrij zasigurno nije jedinstven – na primjer, $(\alpha_3\zeta_1, \beta_1\gamma_2\epsilon_2)$ je također Nashov ekvilibrij. Međutim, uočimo da je takav ekvilibrij na neki način *lošiji* od ekvilibrija kojeg smo dobili indukcijom unatrag – ukoliko se prvi igrač *zabuni* pa umjesto α_3 odigra α_1, drugi igrač to neće uspješno iskoristi, već će odigrati potez β_1 koji mu u vrhu x_1 nije najbolji izbor. Drugim riječima, $(\alpha_3\zeta_1, \beta_1\gamma_2\epsilon_2)$ je Nashov ekvilibrij iako koristi neoptimalne izbore β_1 i γ_2 samo zato što su ti izbori potpuno nebitni ako prvi igrač odigra optimalni početni potez (α_3) i time odvede igru u drugom smjeru.

Ovo razmatranje nas motivira da uvedemo pojam ekvilibrija koji će davati optimalne odluke makar tijek igre *skrenuo* s *optimalnog puta*.

Definicija 3.11. Neka je Γ ekstenzivna igra sa stablom T, te neka je $x \in X \setminus Z$ neki njen nezavršni vrh. Označimo s T_x podstablo od T kojemu je korijen u x, te pretpostavimo da niti jedan skup informacija iz Γ ne sadrži i vrhove iz T_x i vrhove iz $T \setminus T_x$. Tada ima smisla promatrati igru induciranu igrom Γ i stablom T_x i tu ćemo igru nazivati **podigrom** igre Γ s korijenom u x, te ćemo je označavati s Γ^x.

Na primjer, igra sa Slike 2 ima ukupno šest podigara – Γ^{x_0} (što je u biti cijela igra Γ), Γ^{x_1}, Γ^{x_2}, Γ^{x_3}, Γ^{x_4} i Γ^{x_5}.

S druge strane, igra sa Slike 5 ima samo četiri podigre – $\Gamma^{x_0} = \Gamma$, Γ^{x_3}, Γ^{x_4} i Γ^{x_5}. Napominjemo da, na primjer, podstablo s korijenom x_1 ne inducira podigru, budući da se x_1 nalazi u skupu informacija $\{x_1, x_2\}$ koji uključuje i vrh x_2 izvan podstabla T_{x_1}.

Definicija 3.12. **Potpuni čisti (Nashov) ekvilibrij s obzirom na podigre**[2] neke ekstenzivne igre je strateški profil koji inducira čisti Nashov ekvilibrij za svaku od njenih podigara[3].

Na primjer, kod igre sa Slike 2 indukcijom unatrag došli smo do Nashovog ekvilibrija $(\alpha_3\zeta_1, \beta_1\gamma_2\epsilon_2)$ za kojeg se lako možemo uvjeriti da je potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre. Na primjer, ekvilibrij $(\alpha_3\zeta_1, \beta_1\gamma_2\epsilon_2)$ u podigri Γ^{x_3} inducira Nashov ekvilibrij (ζ_1, ϵ_2), a u podigri Γ^{x_4} Nashov ekvilibrij (ϵ_2).

Napominimo da Definicija 3.12 ne zahtijeva da igra bude s potpunim informacijama da bi mogli pričati o potpunom ekvilibriju s obzirom na podigre – takve igre su nam od posebnog interesa velikim dijelom jer kod njih možemo koristiti indukciju unatrag.

Teorem 3.13. *Svaka igra s potpunim informacijama ima čisti potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre.*

Dokaz. Neka je $\Gamma = (T, P, \mathcal{C}, \tau, u)$ neka ekstenzivna igra s potpunim informacijama. Kako bi lakše formalizirali ideju indukcije unatrag, za igru definiramo njenu duljinu $L(\Gamma)$ kao duljinu najduljeg puta od njenog korijena do nekog od završnih vrhova.

Pretpostavimo najprije da je $L(\Gamma) = 1$, odnosno da se stablo sastoji od korijena x_0 iz kojeg svi bridovi vode direktno do završnih vrhova. Ako je x_0 slučajni vrh, tada igra uopće nema igrača. Ako je x_0 pak vrh odluke, tada jednostavno treba odabrati potez koji vodi do završnog vrha s najvećom korisnosti za igrača koji je na potezu.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve igre duljine manje od t, te neka je $L(\Gamma) = t > 1$. Označimo s $x_1, \ldots, x_m$ sve vrhove do kojih vodi neki brid iz x_0, i neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ pripadni potezi. Konstruirajmo igru $\overline{\Gamma}$ iz igre Γ na način da za svaki $k = 1, \ldots, m$ izbrišemo podstablo T_{x_k} te umjesto njega stvorimo završni vrh y_k; ukoliko je x_k već sam po sebi završni vrh, stavimo $y_k = x_k$.

Potrebno je još definirati funkcije korisnosti $\overline{u}_i$ u skraćenoj igri $\overline{\Gamma}$. Ako je x_k završni vrh igre Γ, definiramo $\overline{u}_i(y_k) = u_i(x_k)$. Ako x_k nije završni vrh, vrijedi $L(\Gamma^{x_k}) < t$, pa, prema pretpostavci indukcije podigra Γ^{x_k} ima potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre – označimo ga s $a^{(k)}$. Neka je $Z_{x_k} = Z \cap T_{x_k}$ skup završnih vrhova u igri Γ^{x_k}, i $p_{a^{(k)}}(x_k, z)$ vjerojatnost da će igra krenuvši iz vrha x_k i prateći strateški profil $a^{(k)}$ završiti u vrhu z. Definiramo

$$\overline{u}_i(y_k) = u_i(\alpha_k, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}) = \sum_{z \in Z_{x_k}} p_{a^{(k)}}(x_k, z) u_i(z).$$

Očito je $L(\overline{\Gamma}) = 1$, pa koristeći ponovno pretpostavku indukcije (štoviše, bazu indukcije), ta igra ima potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre; označimo ga s $\overline{a}$ (prisjetimo se $\overline{a} \in \{\alpha_1, \ldots \alpha_m\}$). Tvrdimo da spajanjem strategija $\overline{a}, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ dobivamo traženi potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre igre Γ. Doista, za sve netrivijalne podigre (podigre manje od cijele Γ) to će zbog pretpostavke indukcije biti Nashov ekvilibrij.

Preostaje provjeriti da je $\overline{a} \in \{\alpha_1, \ldots \alpha_m\}$ Nashov ekvilibrij igre Γ. Bsomp $P(x_0) = 1$ i $\overline{a} = \alpha_1$. Primijetimo prvo da se nijednom igraču ne "isplati" promijeniti samo poteze uključene u strategije $a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ (dakle bez promjene poteza α_1); naime, promjene strategija $a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ *ne* utječu na

[2] U situacijama u kojima iz konteksta bude jasno da promatramo samo čiste strategije, ovaj ćemo ekvilibrij nazivati kraće *potpunim ekvilibrijom s obzirom na podigre.*

[3] Moguće je da će neka od podigara imati samo jednog igrača, a u tom slučaju do sada nismo eksplicitno definirali pojam Nashovog ekvilibrija. Naravno, tada uzimamo jedinu smislenu definiciju – Nashov ekvilibrij igre s jednim igračem je strategija koja maksimizira korisnost tog igrača.

ishod igre nakon poteza α_1, a "isplativa" promjena strategije $a^{(x_1)}$ bi se također isplatila u igri Γ^{x_1}, što je u kontradikciji s izborom $a^(x_1)$.

Dakle, moramo još provjeriti da se 1. igraču ne isplati promijeniti potez $\overline{a}$. To vrijedi jer za $k = 1, ..., m$, i za bilo koji strateški profil $\alpha_j, b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}$ koji se razlikuje od $\overline{a}, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ samo u potezima 1. igrača vrijedi

$$u_1(\alpha_j, b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}) \leqslant u_1(\alpha_j, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}) \leqslant u_1(\overline{a}, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)});$$

prva nejednakost slijedi iz odabira $a^{(j)}$ te iz činjenice da ostali $a^{(k)}$ (za $k \neq j$) ne utječu na $u_1(\alpha_j, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$, a druga nejednakost slijedi iz odabira $\bar{a}$. □

Ovaj teorem sada možemo iskoristiti i kako bismo pokazali povijesno jedan od najranijih rezultata iz teorije igara.

Teorem 3.14 (Zermelo[4]). *U šahu, ili Bijeli (igrač koji je prvi na potezu) ima strategiju koja mu jamči pobjedu, ili Crni ima strategiju koja mu jamči pobjedu, ili obojica imaju strategije koje im jamče remi.*[5]

Dokaz. Neka su vrijednosti funkcija korisnosti $(1, -1)$ u slučaju pobjede Bijelog, $(-1, 1)$ u slučaju pobjede Crnog, te $(0, 0)$ u slučaju remija. Na ovaj način šah postaje igra sa sumom nula.

Prema Teoremu 3.13 znamo da postoji Nashov ekvilibrij (štoviše, potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre) (i^*, j^*) s čistim strategijama, a iz Propozicije 1.31 onda slijedi da je vrijednost ove igre jednaka $u_1(i^*, j^*)$, te da je i^* optimalna strategija Bijelog, a j^* Crnog.

Ako je $u_1(i^*, j^*) = 1$, tada je i^* strategija koja Bijelom jamči korisnost 1, odnosno pobjedu. Slično, ako je $u_1(i^*, j^*) = -1$, tada je j^* strategija koja Crnom jamči gubitak od najviše -1, odnosno pobjedu. Konačno, ako je $u_1(i^*, j^*) = 0$, tada je i^* strategija koja Bijelom jamči korisnost od barem 0, odnosno remi, a Crnom gubitak od najviše 0, odnosno također remi. □

Kao što je iz dokaza vidljivo, nismo koristili gotovo niti jedno pravilo šaha, pa samim time nije iznenađujuće da sličan zaključak vrijedi i za sve ostale društvene igre *sličnog formata*.[6]

Zadatak 3.1. Promatrajmo igru sa sumom nula za dva igrača sa slučajnim bacanjem *poštenog* novčića (dakle, s vjerojatnošću 1/2 za oba ishoda). Ako novčić pokaže pismo, funkcije korisnosti su opisane matricom A^P, a u slučaju glave, matricom A^G, pri čemu je

$$A^G = \begin{array}{c} \\ \text{T1} \\ \text{T2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{S1} & \text{S2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{i} \quad A^P = \begin{array}{c} \\ \text{T1} \\ \text{T2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{S1} & \text{S2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Za svaku od donjih igara, nacrtajte odgovarajuće stablo, i formalno opišite igru u skladu s Definicijom 3.4. Zapišite pridruženu stratešku igru, i pronađite vrijednost te igre.

(i) Igra u kojoj je prvom igraču poznat ishod novčića i oba igrača igraju istovremeno.

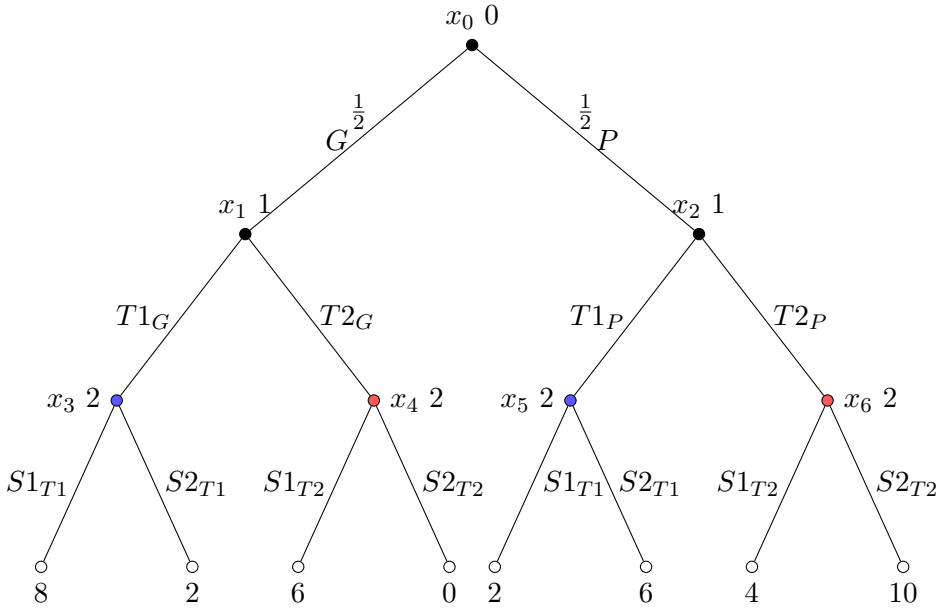
[4] Iako je *Zermelov teorem* uvriježeni naziv, teorem koji je Zermelo doista dokazao je nešto drugačiji. [**SW01**] pruža zanimljiv kratki povijesni pregled, zajedno s prijevodom originalnog Zermelovog članka.

[5] Ne zna se koja je od ove tri mogućnosti istinita. Većina profesionalnih šahista bi se kladila na treću mogućnost, odnosno da Bijeli i Crni imaju strategije koje im jamče remi. S druge strane, statistike pokazuju [**che**] da Bijeli pobjeđuje značajno češće, tako da je i mogućnost da Bijeli ima strategiju koja mu jamči pobjedu iznimno realna. Gotovo nitko ne smatra da je istinita druga mogućnost, odnosno da Crni ima strategiju koja mu jamči pobjedu, iako niti to nije teorijski odbačeno. Problem se u načelu svodi na računalnu provjeru – računalo bi trebalo proanalizirati sve moguće rasporede 32 šahovske figure na ploči. Nije izgledno da će to biti moguće učiniti u imalo skoroj budućnosti – složenost raste eksponencijalno s brojem figura, a tek je 2015. napravljena analiza svih mogućih rasporeda sa 7 figura.

[6] Zbog raznolikosti društvenih igara, bilo bi donekle komplicirano reći što točno znači sintagma *sličnog formata*, ali očekujemo da je čitatelj koji je shvatio dokaz i sam stekao određenu predodžbu i intuiciju o kakvim se društvenim igrama radi.

(ii) Igra u kojoj je prvom igraču poznat ishod novčića, ali on mora prvi otkriti svoj potez (T1 ili T2).

U ovoj skici rješenja, pišemo $T1_G$, odnosno $T2_G$, za strategiju u kojoj prvi igrač igra $T1$ (odnosno $T2$) u slučaju glave. Slično za slučaj pisma.
Sljedeće stablo odgovara varijanti (ii).



Slika 7. Ekstenzivna forma igre (varijanta (ii)). Boje vrhova označavaju skupove informacija igrača 2.

(i) Stablo za ovu igru je vrlo slično Slici 7, osim što vrhovi $x_3 - -x_6$ čine jedan skup informacija, i time imamo samo dva poteza drugog igrača, koje možemo označiti s S1 i S2. Funkcija korisnosti pridružene strateške igre je

	$S1$	$S2$
$(T1_G, T1_P)$	5	4
$(T1_G, T2_P)$	6	6
$(T2_G, T1_P)$	4	3
$(T2_G, T2_P)$	3	5.

Budući da drugi red dominira ostale redove, vrijednost igre je 6.
(ii) Potez (Si_{Tj}) (s lošom notacijom) označava da drugi igrač igra Si u slučaju da prvi igra Tj. Funkcija korisnosti pridružene strateške igre je

	$(S1_{T1}, S1_{T2})$	$(S1_{T1}, S2_{T2})$	$(S2_{T1}, S2_{T2})$	$(S2_{T1}, S1_{T2})$
$(T1_G, T1_P)$	5	5	4	4
$(T1_G, T2_P)$	6	9	6	3
$(T2_G, T1_P)$	4	1	3	6
$(T2_G, T2_P)$	5	5	5	5

.

Vrijednost ove igre je 5.
(Očito je vrijednost barem 5, jer prvi igrač može igrati čistu strategiju $(T2_G, T2_P)$. Da dokažemo da je vrijednost najviše 5, primijetimo da je prvi red dominiran redom 4 i prvi stupac dominiran stupcem 3. Igrajući $(S2_{T1}, S1_{T2})$ s vjerojatnošću 1/2 i $(S2_{T1}, S2_{T2})$ s vjerojatnošću 1/2, drugi igrač može osigurati da je očekivana dobit prvog igrača najviše 5.

Napomena. Postavljeno je pitanje zašto razikujemo primjerice poteze $T1_G$ i $T1_P$. To je zato što u ekstenzivnim igrama općenito, po definiciji, ako dva poteza vode iz različitih skupova informacija ("stanja"), računamo ih kao dva različita poteza. To ima smisla čak i ako postoji određena korespondencija između tih poteza, jer su izbori igrača u vrhovima x_1 i x_2 nezavisni.

Navedimo još jedan primjer koji ilustrira smislenost te konvencije. Recimo da su igrači banka i klijent. Banka ima tri moguća poteza – nudi klijentu jednu od tri opcije (A,B,C) za ulaganje. Klijent tada ima mogućnost svaku od opcija prihvatiti ili odbiti.
Je li broj mogućih poteza klijenta 2 ili 6? Odgovor je 6, jer za svaku od opcija A, B, ili C, on ima izbor, i ti izbori rezultiraju različitim ishodom.

3.5. Mješovite i bihevioralne strategije

Napomena. 2026. se ovo poglavlje neće predavati i ispitivati.

Kao što smo u prethodnom odjeljku vidjeli, kod igara s potpunim informacijama uvijek će postojati potpuni čisti ekvilibrij s obzirom na podigre i on će igračima omogućavati da donesu optimalnu odluku u kojem god stanju da se igra nađe. Kod igara s nepotpunim informacijama situacija je kompleksnija – potpuni čisti ekvilibrij s obzirom na podigre ne mora nužno postojati, a kada i postoji u nekim stanjima neće biti od koristi budući da se igra može naći i u vrhovima koji ne induciraju podigru.

Do sada smo se kod ekstenzivnih igara bavili isključivo čistim strategijama. Kao što već znamo iz prethodnog poglavlja, jednom kada nam je poznato što su čiste strategije, prirodno se nameću i mješovite strategije kao vjerojatnosne distribucije na skupu čistih strategija. Međutim, kod ekstenzivnih igara mješovite strategije su malo preopćenit pojam. Mješovite strategije, ukoliko od njih ne zahtijevamo nikakva dodatna svojstva, uopće ne prepoznaju činjenicu da je kod ekstenzivnih igara svaka strategija sastavljena od manjih jedinica – poteza.

Iz tog je razloga nešto prirodnije promatrati mješovite strategije koje će se sastojati od odabira vjerojatnosne distribucije zasebno za svaki skup informacija promatranog igrača – takvu vrstu mješovitih strategija nazivat ćemo bihevioralnim strategijama. Na primjer, u igri sa Slike 2, prvi igrač može odlučiti da će potez u vrhu x_0 (tj. skupu informacija $\{x_0\}$) odabirati na slučajan način prateći distribuciju $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, a u vrhu x_5 prateći distribuciju $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Ove dvije vjerojatnosne distribucije sada na očiti način induciraju jednu mješovitu strategiju s_i igrača i. Za nju vrijedi da je, na primjer, $s(\alpha_1\zeta_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Definicija 3.15. **Mješovita strategija** igrača i je vjerojatnosna distribucija na skupu A_i, odnosno element skupa $S_i = \Delta A_i$. **Bihevioralna strategija** igrača i je preslikavanje b_i koje svakom skupu informacija $h \in H_i$ igrača i pridružuje vjerojatnosnu distribuciju na skupu C_h. [7] Skup bihevioralnih strategija igrača i označavat ćemo s B_i.

Kao što smo prethodno spomenuli, svaka bihevioralna strategija inducira jednu mješovitu strategiju – rječnikom teorije vjerojatnosti, ta mješovita strategija (koju ćemo također označavati s b_i) je produkt vjerojatnosnih distribucija $b_i(h)$, $h \in H_i$. To znači da je za proizvoljnu čistu strategiju $a_i \in A_i$

$$b_i(a_i) = \prod_{h \in H_i} b_i(h)(a_i(h)).$$

Zbog prethodnih komentara bihevioralne strategije ćemo smatrati vrstom (podskupom) mješovitih strategija. Također, čiste strategije možemo smatrati posebnom vrstom bihevioralnih strategija kod kojih je kod svakog skupa informacija igrača i vjerojatnost 1 dodijeljena jednom potezu. Dakle, možemo pisati $A_i \subset B_i \subset S_i$.

[7] U skladu s ovim, za proizvoljni skup informacija $h \in H_i$ i potez $c \in C_h$, $b_i(h)$ će biti neka vjerojatnosna distribucija na skupu C_h, a $b_i(h)(c)$ vjerojatnost da će strategija b_i za vrhove iz skupa informacija h odabrati potez c.

U nastavku ovog odjeljka cilj nam je pokazati da kod velikog broja igara promatranjem bihevioralnih strategija ništa ne gubimo, odnosno da mješovite strategije koje nisu inducirane bihevioralnim ne donose ništa *suštinski novo*.

Neka je $s = (s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ neki mješoviti strateški profil. Slično kao u Definiciji 3.8, neka je p_s vjerojatnosna distribucija na skupu završnih vrhova Z koju mješoviti strateški profil s inducira. Dakle, $p_s(z)$ je vjerojatnost da će igra, prateći strateški profil s, završiti u završnom vrhu z.

Općenitije, za proizvoljne vrhove $x, x' \in X$ s $p_s(x, x')$ označavat ćemo vjerojatnost da će igra koja kreće iz vrha x prateći mješoviti strateški profil s posjetiti vrh x'. Preciznije, za općeniti mješoviti strateški profil s, $p_s(x, x')$ definirat ćemo kao $p_s(x')/p_s(x)$, odnosno kao uvjetnu vjerojatnost da će igra posjetiti vrh x' ukoliko je posjetila vrh x (u skladu s tim, definicija će biti korektna samo za $p_s(x) > 0$). Ako je mješoviti strateški profil s induciran nekim bihevioralnim strateškim profilom b, tada se lako može vidjet da se omjer $p_s(x, x') = p_s(x')/p_s(x)$ svodi na produkt vjerojatnosti odabira bridova na putu od x do x' (ako takav jedinstveni put uopće postoji, u suprotnom je očito $p_s(x, x') = 0$). Taj produkt je, naravno, dobro definiran čak i za $p_s(x) = 0$, pa ga stoga možemo doživljavati i kao proširenu, alternativnu, definiciju veličine $p_s(x, x')$ u slučaju kada je s induciran bihevioralnim strateškim profilom.

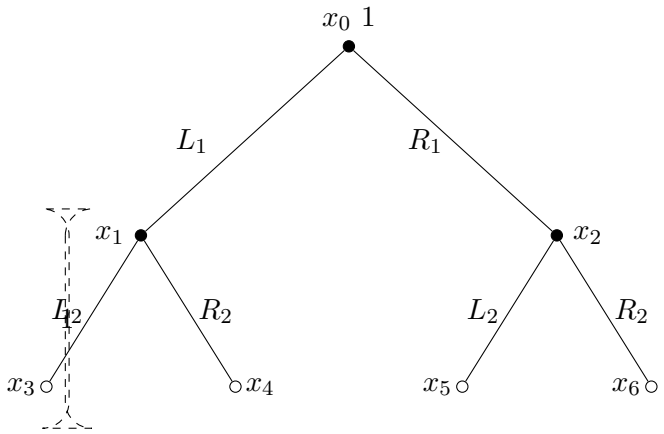
Uz upravo uvedene oznake imamo da je onda $p_s(z) = p_s(x_0, z)$. Uočimo, da su u definiciji funkcije p_s implicitno uključena *dva izvora slučajnosti* – jedan dolazi od odabira čistih strategija u skladu sa mješovitim strateškim profilom s, a drugi od slučajnih vrhova.

Definicija 3.16. Za mješovite strategije $s_i, s_i' \in S_i$ reći ćemo da su **realizacijski ekvivalentne** ako induciraju iste vjerojatnosne distribucije na skupu završnih vrhova, tj. ako za sve $s_{-i} \in S_{-i}$ i sve završne vrhove $z \in Z$ vrijedi

$$p_{(s_{-i}, s_i)}(z) = p_{(s_{-i}, s_i')}(z).$$

Prije iskaza glavnog rezultata, promotrimo primjer koji ilustrira razliku između bihevioralnih i općenitih strategija.

Primjer 3.17. Promatrajmo igru s jednim igračem na Slici 8.



Slika 8.

Neka je s strategija koja daje vjerojatnost $1/2$ čistoj strategiji L_1L_2 i $1/2$ čistoj strategiji R_1R_2. Primijetimo da je

$$p_s(x_4) = p_s(x_5) = 0.$$

Možemo provjeriti da ne postoji "ekvivalentna" bihevioralna strategija, jer bi tada $b(x_0)$ morala davati pozitivnu vjerojatnost potezima L_1 i R_1. Dakle, da bi vrijedilo $p_s(x_4) = p_s(x_5) = 0$, $b(\{x_1, x_2\})$ bi morala davati vjerojatnost 0 potezima L_2 i R_2, što ne daje vjerojatnosnu distribuciju.

Neformalno, razlika između bihevioralnih i općenitih mješovitih strategija je što u općenitim strategijama igrač može korelirati vlastite izbore poteza u različitim skupovima informacija.

TEOREM 3.18 (Kuhn). *U igri s potpunim prisjećanjem, svaka mješovita strategija ima realizacijski ekvivalentnu bihevioralnu strategiju.*

DOKAZ. Neka je $s_i \in S_i$, te neka je $h \in H_i$. Ideja je da za svaki $c \in C_h$, $b_i(h)(c)$ definiramo kao uvjetnu vjerojatnost da će biti odabran potez c jednom kada igra dođe do vrha iz skupa informacija h. U takvom pristupu leže dva moguća problema koja moramo otkloniti – spomenuta uvjetna vjerojatnost mogla bi ovisiti o s_{-i} i o konkretnom vrhu iz h u kojem se igra trenutno nalazi. Tada i u jednom i u drugom slučaju ne bismo mogli jednoznačno definirati $b_i(h)(c)$ na planirani način.

Neka su $x \in h$ i $s_{-i} \in S_{-i}$ takvi da je $p_s(x) > 0$, pri čemu je, naravno, $s = (s_{-i}, s_i)$. Neka je x_c vrh u koji vodi potez c odigran u vrhu x. Pokažimo da vrijednost $p_s(x, x_c)$ ne ovisi niti o $s_{-i} \in S_{-i}$ niti o $x \in h$.

Neka je $A_j(x)$ skup svih čistih strategija igrača j koje odabiru poteze na putu od x_0 do x. [8] Tada je[9]

$$p_s(x, x_c) = \frac{p_s(x_c)}{p_s(x)} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \sum_{a_j \in A_j(x_c)} s_j(a_j)}{\prod_{j=1}^{n} \sum_{a_j \in A_j(x)} s_j(a_j)}.$$

Neka je $A_{i,c}$ skup svih čistih strategija igrača i koje skupu informacija h pridružuju potez c. Tada je očito $A_i(x_c) = A_i(x) \cap A_{i,c}$ i $A_j(x) = A_j(x_c)$ za sve $j \neq i$. Stoga slijedi

$$p_s(x, x_c) = \frac{\sum_{a_i \in A_i(x_c)} s_i(a_i)}{\sum_{a_i \in A_i(x)} s_i(a_i)} = \frac{\sum_{a_i \in A_i(x) \cap A_{i,c}} s_i(a_i)}{\sum_{a_i \in A_i(x)} s_i(a_i)}. \tag{3.1}$$

Očito je da desna strana ove jednakosti ne ovisi o s_{-i}. Štoviše, ne ovisi niti o odabiru $x \in h$ budući da zbog pretpostavke o potpunom prisjećanju (Definicija 3.5) $A_i(x)$ ne ovisi o $x \in h$.

Zaključujemo da za sve $h \in H_i$ za koje postoje $x \in h$ i $s_{-i} \in S_{-i}$ takvi da je $p_s(x) > 0$ možemo jednoznačno definirati $b_i(h)(c) = p_s(x, x_c)$ za sve $c \in C_h$.

Za sve ostale $h \in H_i$, igra će s vjerojatnosti 0 doći do nekog vrha iz h. Zbog toga za $b_i(h)$ možemo uzeti proizvoljnu vjerojatnosnu distribuciju na C_h.

Pokažimo da sada da su b_i i s_i realizacijski ekvivalentne strategije. Neka je $s_{-i} \in S_{-i}$, te neka je $z \in Z$ završni vrh do kojeg iz korijena vodi put $x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = z$.

Pretpostavimo najprije da je $p_{(s_{-i},s_i)}(z) > 0$. Tada je[10]

$$p_{(s_{-i},s_i)}(z) = p_{(s_{-i},s_i)}(x_0, x_1) p_{(s_{-i},s_i)}(x_1, x_2) \ldots p_{(s_{-i},s_i)}(x_k, z). \tag{3.2}$$

Promotrimo proizvoljni $p_{(s_{-i},s_i)}(x_l, x_{l+1})$. Razlikujemo dva slučaja.

Ako je x_l slučajni vrh ili vrh odluke nekog igrača $j \neq i$, tada po prethodnom znamo da vjerojatnost $p_{(s_{-i},s_i)}(x_l, x_{l+1})$ ovisi samo o strategiji igrača j (a čak ni o njoj ukoliko se radi o slučajnom vrhu). Posebno, ne ovisi o strategiji igrača i, pa je $p_{(s_{-i},s_i)}(x_l, x_{l+1}) = p_{(s_{-i},b_i)}(x_l, x_{l+1})$.

S druge strane, pretpostavimo sada da je x_l vrh odluke igrača i. Neka je

$$T = \{x_0, \ldots, x_l\} \cap P^{-1}(i),$$

skup svih vrhova odluke igrača i na putu od x_0 do x_{l+1}. Za svaki $x \in T$ neka je $h_x \in H_i$ skup informacija kojem x pripada (znači, $x \in h_x$), a c_x potez koji vodi do sljedbenika vrha x na tom putu.

[8] Dakle, za svaki vrh odluke igrača j na putu od x_0 do x strategija mora odabrati onaj potez koji vodi prema idućem vrhu na tom putu.

[9] Da bi brojnici i nazivnici iza prve i druge jednakosti bili jednaki, trebali bi napisati i faktore koji odgovaraju vjerojatnostima odabira ispravnih poteza u eventualnim slučajnim vrhovima koji se nalaze na putu od x_0 do x i x_0 do x_c. Međutim, ti su faktori jednaki pa smo ih u razlomku iza druge jednakosti odmah pokratili.

[10] Zbog pretpostavke $p_{(s_{-i},s_i)}(z) > 0$, sve uvjetne vjerojatnosti u (3.2) su dobro definirane.

Iz jednadžbe (3.1) znamo da je

$$p_{(s_{-i},b_i)}(x_l, x_{l+1}) = \frac{\sum_{a_i \in A_i(x_{l+1})} b_i(a_i)}{\sum_{a_i \in A_i(x_l)} b_i(a_i)}.$$

Međutim, uočimo da je

$$A_i(x_l) = \{a_i \in A_i \colon a_i(h_x) = c_x \text{ za sve } x \in T \setminus \{x_l\}\},$$
$$A_i(x_{l+1}) = \{a_i \in A_i \colon a_i(h_x) = c_x \text{ za sve } x \in T\}.$$

Sada iz definicije mješovite strategije inducirane bihevioralnom strategijom, dobivamo da je

$$\sum_{a_i \in A_i(x_l)} b_i(a_i) = \prod_{x \in T \setminus \{x_l\}} b_i(h_x)(c_x),$$
$$\sum_{a_i \in A_i(x_{l+1})} b_i(a_i) = \prod_{x \in T} b_i(h_x)(c_x).$$

Možemo zaključiti da je $p_{(s_{-i},b_i)}(x_l, x_{l+1}) = b_i(h_{x_l})(c_{x_l})$, što smo definirali tako da bude jednako $p_{(s_{-i},s_i)}(x_l, x_{l+1})$.

Dakle, u svakom slučaju je $p_{(s_{-i},s_i)}(x_l, x_{l+1}) = p_{(s_{-i},b_i)}(x_l, x_{l+1})$ za sve l pa iz jednakosti (3.2) slijedi da je

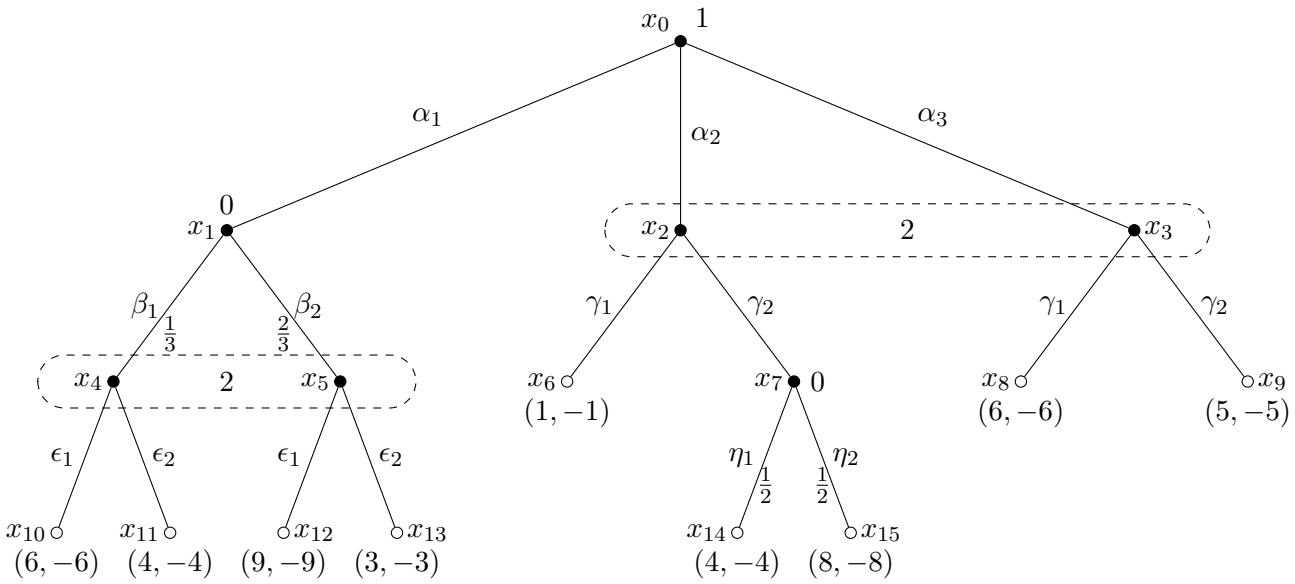
$$p_{(s_{-i},s_i)}(z) = p_{(s_{-i},b_i)}(z) \quad \text{za sve } z \in Z \text{ takve da je } p_{(s_{-i},s_i)}(z) > 0.$$

Preostaje za komentirati slučaj $p_{(s_{-i},s_i)}(z) = 0$. Uočimo da bi prethodni dokaz funkcionirao čak i kada bi bilo da je $p_{(s_{-i},s_i)}(z) = 0$, ukoliko bi u isto vrijeme vrijedilo da je $p_{(s_{-i},s_i)}(x_0, x_k) > 0$ (doista, sve uvjetne vjerojatnosti bile bi s obzirom na događaje pozitivne vjerojatnosti pa samim time i dobro definirane). To nas navodi da promatramo najmanji indeks m (odnosno prvi vrh na putu od x_0 do z) za koji je $p_{(s_{-i},s_i)}(x_m) = 0$. Tada, ukoliko provedemo prethodni dokaz praveći se da je x_m završni vrh, dobivamo da je

$$p_{(s_{-i},b_i)}(x_m) = p_{(s_{-i},s_i)}(x_m) = 0.$$

Budući da je $p_{(s_{-i},b_i)}(z) \leqslant p_{(s_{-i},b_i)}(x_m)$ (ako je igra završila u vrhu z, sigurno je prije morala posjetiti i vrh x_m), slijedi da je i $p_{(s_{-i},b_i)}(z) = 0$ što smo i trebali pokazati. □

ZADATAK 3.2. Na slici je prikazana ekstenzivna igra Γ s dva igrača sa sumom nula.



(a) Je li igra na slici igra s potpunim prisjećanjem?

(b) Navedite skupove informacija i skupove poteza 2. igrača.

(c) Navedite pridruženu stratešku igru i nađite sve njene *čiste* ekvilibrije. Budući da se radi o igri sa sumom nula, dovoljno je navesti funkciju korisnosti prvog igrača u_1.

(d) Pronađite jedan strateški profil s takav da je $u_1(s) = 7$.

(e) Neka je Γ' ekstenzivna igra s potpunim informacijama dobivena prirodnom modifikacijom igre Γ. Navedite skup informacija drugog igrača u igri Γ'. Koliko čistih strategija ima 2. igrač u Γ'?

(f) Nađite jedan potpuni čisti ekvilibrij po podigrama igre Γ'.

(g) Nađite jedan čisti Nashov ekvilibrij igre Γ' koji nije i potpuni čisti ekvilibrij po podigrama.

Rješenje.

(c) Pridružena igra je

$$\begin{array}{r} \\ \alpha_1 \\ = \ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \epsilon_1\gamma_1 & \epsilon_1\gamma_2 & \epsilon_2\gamma_1 & \epsilon_2\gamma_2 a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 8 & 10/3 & 10/3 \\ 1 & 6 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Matrica nema unos koji je maksimalan u svom retku i minimalan u svom stupcu, pa igra nema čistih Nashovih ekvilibrija.

(d) Primjerice, strateški profil "$(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3, \epsilon_1\gamma_1)$"

(e) Skupovi informacija su jednočlani s elementima x_3, x_5, x_2, x_3. Ima 16 čistih strategija.

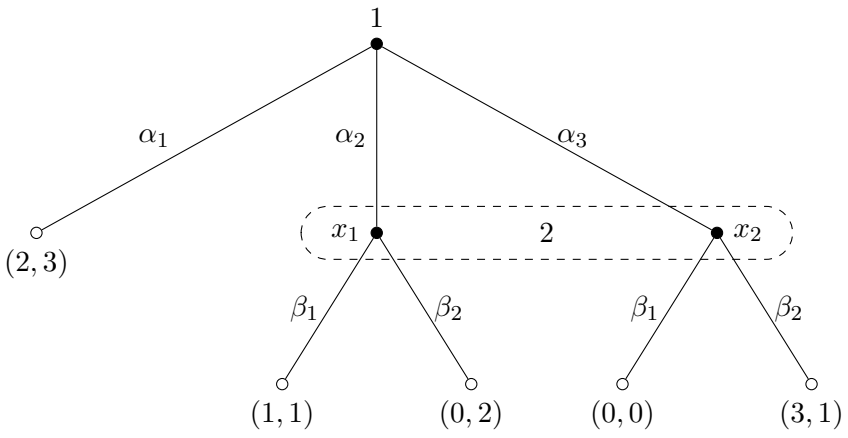
(f) Podigre s korijenima x_1, x_2, x_3 imaju vrijednosti 10/3, 1 i 5 redom. Dakle, jedan PEP je $\alpha_3, \epsilon_1\gamma_1$.

(h) $(\alpha_3, \epsilon_2\gamma_1)$.

3.6. Potpuni bayesovski i sekvencijalni ekvilibrij

Napomena. 2025./26/. godine gradivo u nastavku neće biti uključeno u kolegij, ali ostavljamo ga za zainteresirane čitatelje.

Promotrimo igru čije je stablo prikazano na sljedećoj slici.



Uočimo da je (α_1, β_1) jedan Nashov ekvilibrij ove igre. Štoviše, on je i potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre, budući da ovakva igra nema netrivijalnih podigara.

Međutim, ovakav Nashov ekvilibrij sigurno nije optimalan. Naime, pretpostavimo da je igra došla do skupa informacija $\{x_1, x_2\}$ drugog igrača. Tada će se racionalni drugi igrač sasvim sigurno odlučiti za potez β_2 koji mu u svakom slučaju donosi veću korisnost, iako ne zna točno u kojem se od dva vrha nalazi. Štovište, o tome može razmišljati i prvi igrač prilikom odabira poteza u vrhu x_1 i, vođen racionalnošću drugog igrača, odabrati α_3 te tako doći do korisnosti 3 umjesto korisnosti 2 koju bi imao

odabirom poteza α_1. Dakle, (α_3, β_2) je također Nashov ekvilibrij i on je na neki način *smisleniji* od ekvilibrija (α_1, β_1).

Kao što ovaj primjer otkriva, da je Nashov ekvilibrij ujedno i potpuni ekvilibrij s obzirom na podigre neće značiti puno ako igra ima malen broj podigara, a to će često biti slučaj kod igara s nepotpunim informacijama. Samim time, neki od ekvilibrija na neki način neće biti optimalni ili smisleni. Zato je cilj ovog odjeljka uvesti novu vrstu ekvilibrija koji će biti nešto prilagođeniji igrama s mnogo višečlanih skupova informacija.

Najvažnija ideja je da o vrhovima iz istog skupa informacija razmišljamo vjerojatnosno, odnosno da ako je igra trenutno u nekom višečlanom skupu informacija, igrač koji je na potezu može za neke vrhove misliti da odgovaraju vjerojatnijem stanju igre od drugih. Na primjer, pretpostavimo da se u prethodnom primjeru igra našla u skupu informacija $\{x_1, x_2\}$, te se stavimo u poziciju drugog igrača. Je li jednako vjerojatno da je igra u vrhu x_1 kao i da je u vrhu x_2 ili je nešto od toga vjerojatnije? Ako je prvi igrač racionalan, on će sigurno doći do zaključka da je nama bolje odabrati potez β_2, u kojemgod od vrhova x_1 i x_2 da se igra nalazila. Međutim, ako se igra nalazi u vrhu x_1, potez β_2 će prvom igraču donijeti korisnost 0, a ako se nalazi u vrhu x_2, potez β_2 prvom će igraču donijeti korisnost 3. Dakle, prvom igraču (koji računa na našu racionalnost u odabiru poteza β_2) je puno više u interesu igru dovesti do vrha x_2 (potez α_3), nego do vrha x_1 (potez α_2). Dakle, potpuno je logično da mislimo da je puno vjerojatnije da je igra u vrhu x_2 nego u vrhu x_1, iako nemamo apsolutnu sigurnost.

Druga ideja je da, jednom kada igrač ima vjerojatnosti da se igra nalazi u pojedinim vrhovima, te vjerojatnosti iskoristi za računanje očekivanih dobitaka, pa onda samim time i za svoje odluke.

Definicija 3.19. **Sustav vjerovanja** u nekoj ekstenzivnoj igri je funkcija μ koja svakom skupu informacija $h \in H$ pridružuje neku vjerojatnosnu distribuciju na skupu h. **Prosudba** je uređeni par (b, μ), pri čemu je b neki bihevioralni strateški profil.

Naravno, od interesa će nam biti samo one prosudbe koje su racionalne, odnosno koje dovode do maksimalne očekivane korisnosti. Pokažimo sada kako ćemo to točno kvantificirati.

Neka je (b, μ) neka prosudba, te fiksirajmo neki skup informacija $h \in H_i$ igrača i. Ako se igra trenutno nalazi u vrhu $x \in h$, vjerojatnost da će završiti u vrhu $z \in Z$, prateći bihevioralni strateški profil b, označavat ćemo, kao i prije, s $p_b(x, z)$ i ta je veličina, u skladu s komentarom na stranici 63 dobro definirana čak i za $p_b(x) = 0$. Očekivanu korisnost igrača i označavat ćemo s $u_i^x(b)$ te će vrijediti

$$u_i^x(b) = \sum_{z \in Z} p_b(x, z) u_i(z).$$

Budući da nam sustav vjerovanja μ daje vjerojatnost (koja odražava vjerovanje igrača) da se igra doista nalazi u vrhu x, možemo odrediti i očekivanu korisnost igrača i ukoliko je igra trenutno u skupu informacija h. Ako tu vrijednost označimo s $u_i^{h,\mu}(b)$, imamo da je

$$u_i^{h,\mu}(b) = \sum_{x \in h} \mu(h)(x) u_i^x(b).$$

Naravno, zanimat će nas one bihevioralne strategije koje maksimiziraju $u_i^{h,\mu}(b)$ za sve skupove informacija h.

Definicija 3.20. Za prosudbu (b, μ) kažemo da je **sekvencijalno racionalna** ako za svakog igrača i i svaki $h \in H_i$ vrijedi

$$u_i^{h,\mu}(b) = \max_{b_i' \in B_i} u_i^{h,\mu}(b_{-i}, b_i').$$

Uočimo da ako nam je poznat bihevioralni strateški profil b, tada je vjerojatnost da će igra doći do skupa informacija h jednaka $p_b(h) := \sum_{x' \in h} p_b(x')$. Općenitije, $p_b(x, h) := \sum_{x' \in h} p_b(x, x')$ će biti vjerojatnost da će podigra Γ^x doći do skupa informacija h.

Ukoliko su odgovarajuće uvjetne vjerojatnosti dobro definirane (tj. $p_b(x,h) > 0$), Bayesova formula nam pruža logičan izbor za vjerojatnosnu distribuciju $\mu(h)$ na skupu h.

Definicija 3.21. Za prosudbu (b,μ) kažemo da je **bayesovski konzistentna** ukoliko je

$$\mu(h)(x') = \frac{p_b(x,x')}{p_b(x,h)}. \tag{3.3}$$

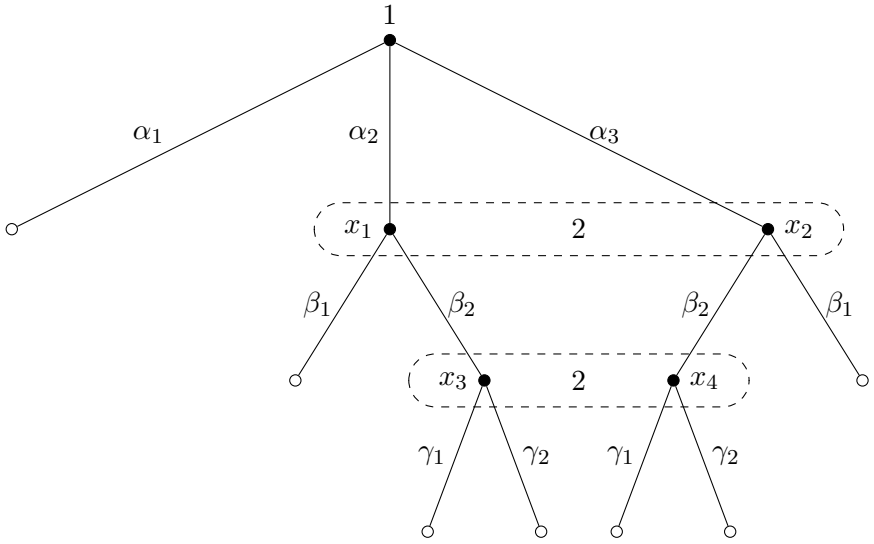
za svaku podigru Γ^x, svaki njen skup informacija h za koji je $p_b(x,h) > 0$ i svaki $x' \in h$.

Uočimo da u jednakosti (3.3), desna strana ovisi o x, a lijeva ne. Nije teško za pokazati da je, usprkos tome, definicija korektna, tj. ako je h neki skup informacija u podigri Γ^x koja je podigra podigre Γ^y, te $p_b(y,h) > 0$, tada je i $p_b(x,h) > 0$ i

$$\frac{p_b(x,x')}{p_b(x,h)} = \frac{p_b(y,x')}{p_b(y,h)}, \quad \text{za sve } x' \in h.$$

Za fiksni bihevioralni strateški profil b, zahtjev da prosudba (b,μ) bude bayesovski konzistentna postavlja značajne restrikcije na moguće sustave vjerovanja μ. U velikom broju situacija to će biti dovoljno za naše potrebe, ali idući primjer pokazuje da su neki apsurdni sustavi vjerovanja mogući čak i uz uvjet bayesovske konzistentnosti.

Primjer 3.22. Promotrimo igru prikazanu na Slici 9.



Slika 9.

Uzmimo neki bihevioralni strateški profil b u kojem prvi igrač uvijek igra α_1, dok drugi igrač na skupu informacija $\{x_1, x_2\}$ uvijek bira β_2. Budući da ovakva igra nema netrivijalnih podigara, te da će uz bihevioralne strategije s navedenim svojstvima skupove informacija $\{x_1, x_2\}$ i $\{x_3, x_4\}$ posjetiti s vjerojatnosti 0, zaključujemo da će svaki sustav vjerovanja s b činiti bayesovski konzistentnu prosudbu. Jedan takav, iznimno apsurdan, sustav vjerovanja mogao bi onda biti onaj kod kojega je $\mu(\{x_1,x_2\})(x_2) = 1$ i $\mu(\{x_3,x_4\})(x_3) = 1$. Takav sustav vjerovanja nema previše smisla – nemoguće je da igra u isto vrijeme posjeti i vrh x_2 i vrh x_3.

Kako bismo izbjegli neke ovakve situacije, uvodimo nešto snažniji koncept smislenosti vjerovanja koji ćemo jednostavno nazivati – konzistentnost. Ključnu ideju također možemo prezentirati na prethodnom primjeru. Umjesto prethodno navedenog bihevioralnog strateškog profila b kod kojeg su se s vjerojatnosti 1 birali potezi α_1 i β_2, promotrimo bihevioralni strateški profil b' kod kojeg se potez α_1 bira s vjerojatnosti 0.98, potezi α_2 i α_3 svaki s vjerojatnosti 0.01, potez β_2 s vjerojatnosti 0.99 i potez

β_1 s vjerojatnosti 0.01. Dakle, b' je iznimno sličan b, ali s bitnom razlikom da će se sada igra svaki skup informacija posjetiti s pozitivnom vjerojatnosti, pa će oni samim time morati biti dio razmatranja kod traženja sustava vjerovanja koji će činiti bayesovski konzistentnu prosudbu. Ta razmatranja će potom onemogućiti stavljanje velikih vjerojatnosti istodobno i na x_2 i na x_3 kao što je prije bio slučaj.

Za bihevioralni strateški profil b reći ćemo da je **potpuno mješovit** ukoliko je $p_b(h) > 0$ za svaki $h \in H$. Uočimo da kod potpuno mješovitih strateških profila postoji jedinstveni sustav vjerovanja s kojim čine bayesovski konzistentnu prosudbu.

Definicija 3.23. Prosudba (b, μ) je **konzistentna** ukoliko postoji niz (b^n, μ^n) bayesovski konzistentnih prosudbi takav da je svaki b^n potpuno mješovit i $\lim_{n\to\infty}(b^n, \mu^n) = (b, \mu)$.

Nije teško za dokazati da je svaka konzistentna prosudba ujedno i bayesovski konzistentna.

Pokažimo da uvjet konzistentnosti eliminira problem postojanja besmislenog sustava vjerovanja u Primjeru 3.22, što će ujedno pokazati da bayesovski konzistentne prosudbe ne moraju nužno biti i konzistentne. Ponovno uzimamo bihevioralni strateški profil b iz tog primjera, te promatramo neku konzistentnu prosudbu (b, μ) prema kojoj teži neki niz (b^n, μ^n) bayesovski konzistentnih prosudbi s potpuno mješovitim strateškim profilima b^n. Budući da igra, prateći strateški profil b^n, s pozitivnom vjerojatnošću posjećuje svaki skup informacija, imamo da je

$$\begin{aligned}
\mu^n(\{x_3, x_4\})(x_4) &= \frac{p_{b^n}(x_4)}{p_{b^n}(\{x_3, x_4\})} \\
&= \frac{b_1^n(x_0)(\alpha_3) \cdot b_2^n(\{x_1, x_2\})(\beta_2)}{b_1^n(x_0)(\alpha_2) \cdot b_2^n(\{x_1, x_2\})(\beta_2) + b_1^n(x_0)(\alpha_3) \cdot b_2^n(\{x_1, x_2\})(\beta_2)} \\
&= \frac{b_1^n(x_0)(\alpha_3)}{b_1^n(x_0)(\alpha_2) + b_1^n(x_0)(\alpha_3)} \\
&= \frac{p_{b^n}(x_2)}{p_{b^n}(\{x_1, x_2\})} \\
&= \mu^n(\{x_1, x_2\})(x_2).
\end{aligned}$$

Puštanjem limesa dobivamo da je nužno $\mu(\{x_3, x_4\})(x_4) = \mu(\{x_1, x_2\})(x_2)$, pa je nemoguća situacija kao u Primjeru 3.22.

Sada kada smo uveli pojmove bayesovske konzistentnosti i konzistentnosti možemo napokon definirati i ekvilibrije.

Definicija 3.24. Prosudba (b, μ) je **potpuni bayesovski ekvilibrij** ukoliko je sekvencijalno racionalna i bayesovski konzistentna. Prosudba (b, μ) je **sekvencijalni ekvilibrij** ukoliko je sekvencijalno racionalna i konzistentna.

Često ćemo, malo neprecizno, reći da je b potpuni bayesovski ili sekvencijalni ekvilibrij ukoliko postoji sustav vjerovanja μ takav da je (b, μ) potpuni bayesovski ili sekvencijalni ekvilibrij.

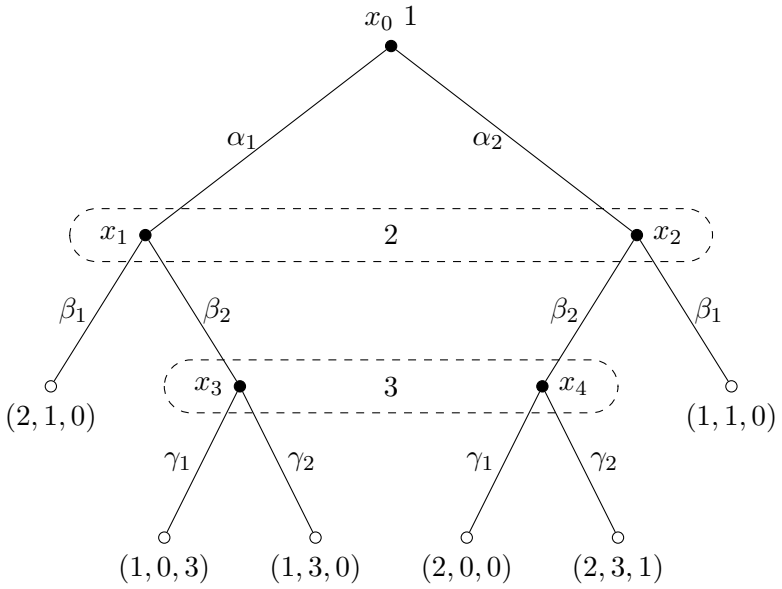
Sljedeći teorem pokazuje odnos između raznih vrsta ekvilibrija s kojima sada raspolažemo.

Teorem 3.25. *Svaka ekstenzivna igra ima sekvencijalni ekvilibrij. Svaki sekvencijalni ekvilibrij je i potpuni bayesovski. Svaki potpuni bayesovski ekvilibrij je potpuni ekvilibrij*[11] *s obzirom na podigre, a samim time i Nashov ekvilibrij.*

Dokaz ovog teorema izostavljamo, ali napominjemo da je jedino dokaz egzistencije sekvencijalnog ekvilibrija netrivijalan, dok sve ostale tvrdnje proizlaze manje ili više direktno iz definicija.

Primjer 3.26. Odredimo sve sekvencijalne ekvilibrije igre na Slici 10.

[11] Bihevioralni, ali ne nužno i čisti.



Slika 10.

Uočimo da se odabir sustava vjerovanja μ svodi na odabir dvije vrijednost – $q := \mu(\{x_1, x_2\})(x_1)$ i $q' := \mu(\{x_3, x_4\})(x_3)$. Dokažimo najprije da ćemo, zbog konzistentnosti, nužno imati $q = q'$. Za potpuno mješoviti bihevioralni strateški profil b koji s μ čini bayesovski konzistentnu prosudbu imamo[12]

$$q' = \frac{p_b(x_3)}{p_b(\{x_3, x_4\})} = \frac{b_1(\alpha_1)b_2(\beta_2)}{b_2(\beta_2)} = b_1(\alpha_1) = q.$$

Budući da je konzistentna prosudba limes bayesovski konzistentnih prosudbi, isti se zaključak prenosi i na konzistentne prosudbe[13].

Prijeđimo sada na traženje sekvencijalnih ekvilibrija koristeći sekvencijalnu racionalnost za prikladne skupove informacija. Krećemo od trećeg igrača i njegovog skupa informacija $\{x_3, x_4\}$. Pripadana očekivana korisnost trećeg igrača $(u_3^{\{x_3,x_4\},\mu}(b))$ je

$$q \cdot (b_3(\gamma_1) \cdot 3 + b_3(\gamma_2) \cdot 0) + (1 - q) \cdot (b_3(\gamma_1) \cdot 0 + b_3(\gamma_2) \cdot 1) = (4q - 1)b_3(\gamma_1) + 1 - q.$$

Ako je $q > \frac{1}{4}$ ovo će biti maksimalno za $b_3(\gamma_1) = 1$, ako je $q < \frac{1}{4}$ za $b_3(\gamma_1) = 0$, dok za $q = \frac{1}{4}$ nemamo restrikcija na vjerojatnosnu mjeru b_3.

Promotrimo sada skup informacija $\{x_1, x_2\}$ drugog igrača. Pripadna očekivana korisnost $(u_2^{\{x_1,x_2\},\mu}(b))$ bit će jednaka

$$\begin{aligned} &q \cdot (b_2(\beta_1) \cdot 1 + b_2(\beta_2)b_3(\gamma_1) \cdot 0 + b_2(\beta_2)b_3(\gamma_2) \cdot 3) \\ &\quad + (1 - q)(b_2(\beta_1) \cdot 1 + b_2(\beta_2)b_3(\gamma_1) \cdot 0 + b_2(\beta_2)b_3(\gamma_2) \cdot 3) = (1 - 3b_3(\gamma_2))b_2(\beta_1) + 3b_3(\gamma_2) \end{aligned}$$

Koristeći dobivene zaključke za trećeg igrača, vidimo da za $q > \frac{1}{4}$ ova korisnost iznosi $b_2(\beta_1)$, što je maksimalno za $b_2(\beta_1) = 1$. Slično, za $q < \frac{1}{4}$ očekivana korisnost je $3 - 2b_2(\beta_1)$, što je maksimalno za $b_2(\beta_1) = 0$. Razmotrimo još i situaciju $q = \frac{1}{4}$. Tada nemamo nikakve restrikcije otprije na distribuciju b_3 i možemo zaključiti da ako je $b_3(\gamma_2) > \frac{1}{3}$ maksimalna korisnost postiže se za $b_2(\beta_1) = 0$, ako je $b_3(\gamma_2) < \frac{1}{3}$ za $b_2(\beta_1) = 1$, dok za $b_3(\gamma_2) = \frac{1}{3}$ očekivana korisnost ne ovisi o distribuciji b_2.

[12] Budući da svaki od igrača ima samo jedan skup informacija, za (jedinstveni) $h \in H_i$ vjerojatnosnu mjeru $b_i(h)$ označavat ćemo kraće s b_i.

[13] Uočimo da takav zaključak ne mora nužno vrijedi i za bayesovski konzistentne prosudbe sa strateškim profilom koji nije potpuno mješovit. Na primjer, ako drugi igrač s vjerojatnošću 1 igra β_1, tada q' može biti proizvoljan.

Promotrimo konačno i prvog igrača i njegov trivijalni skup informacija $\{x_0\}$. Pripadna očekivana korisnost je

$$\begin{aligned} u_1^{\{x_0\},\mu}(b) &= b_1(\alpha_1)b_2(\beta_1)\cdot 2 + b_1(\alpha_1)b_2(\beta_2)b_3(\gamma_1)\cdot 1 + b_1(\alpha_1)b_2(\beta_2)b_3(\gamma_2)\cdot 1 \\ &\quad + b_1(\alpha_2)b_2(\beta_1)\cdot 1 + b_1(\alpha_2)b_2(\beta_2)b_3(\gamma_1)\cdot 2 + b_1(\alpha_2)b_2(\beta_2)b_3(\gamma_2)\cdot 2 \\ &= 2b_1(\alpha_1)b_2(\beta_1) + b_1(\alpha_1)b_2(\beta_2) + b_1(\alpha_2)b_2(\beta_1) + 2b_1(\alpha_2)b_2(\beta_2) \\ &= b_1(\alpha_1)(-1 + 2b_2(\beta_1)) + 2 - b_2(\beta_1). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ako je $q > \frac{1}{4}$, tada iz prethodnih zaključaka znamo da je $b_2(\beta_1) = 1$ pa je očekivani dobitak prvog igrača jednak $1 + b_1(\alpha_1)$, što je maksimalno za $b_1(\alpha_1) = 1$. Također, zbog konzistentnosti znamo da je $b_1(\alpha_1) = q$. Dakle, dobili smo kandidata za sekvencijalni ekvilibrij[14]

$$b_1(\alpha_1) = 1, \quad b_2(\beta_1) = 1, \quad b_3(\gamma_1) = 1, \quad q = q' = 1.$$

Ako je $q < \frac{1}{4}$, tada iz prethodnih zaključaka znamo da je $b_2(\beta_1) = 0$, pa je očekivani dobitak prvog igrača jednak $2 - b_1(\alpha_1)$, što je maksimalno za $b_1(\alpha_1) = 0$. Ovime smo dobili još jednog kandidata za sekvencijalni ekvilibrij

$$b_1(\alpha_1) = 0, \quad b_2(\beta_1) = 0, \quad b_3(\gamma_1) = 0, \quad q = q' = 0.$$

Konačno, ako je $q = \frac{1}{4}$, tada je i $b_1(\alpha_1) = \frac{1}{4}$. Da bi sekvencijalna racionalnost bila zadovoljena iz (3.4) vidimo da mora biti $b_2(\beta_1) = \frac{1}{2}$. Iz prethodnih zaključaka za drugog igrača znamo da sekvencijalna racionalnost nameće da je onda $b_3(\gamma_1) = \frac{2}{3}$. Ovime smo dobili i trećeg kandidata za sekvencijalni ekvilibrij

$$b_1(\alpha_1) = \tfrac{1}{4}, \quad b_2(\beta_1) = \tfrac{1}{2}, \quad b_3(\gamma_1) = \tfrac{2}{3}, \quad q = q' = \tfrac{1}{4}.$$

Da bi dobivena tri kandidata doista i bili sekvencijalni ekvilibriji, treba pokazati i da se radi o konzistentnim prosudbama. Međutim, u igri u ovom primjeru to je iznimno jednostavno za provjeriti. Pokazat ćemo kako to napraviti za prvog kandidata. Za svaki n neka je b^n potpuno mješoviti bihevioralni strateški profil takav da je $b_1^n(\alpha_2) = b_2^n(\beta_2) = b_3^n(\gamma_2) = \frac{1}{n}$, te neka je μ^n jedinstveni sustav vjerovanja takav da je (b^n, μ^n) bayesovski konzistentna prosudba. Očito je $\lim_{n\to\infty} b^n = b$, a lako se pokaže i da je $\lim_{n\to\infty} \mu^n = \mu$. Doista, na primjer, imamo da je

$$\mu^n(\{x_3, x_4\})(x_3) = \frac{p_{b^n}(x_3)}{p_{b^n}(\{x_3, x_4\})} = \frac{(1-\frac{1}{n})\frac{1}{n}}{(1-\frac{1}{n})\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n}} \to 1 = q = \mu(\{x_3, x_4\})(x_3).$$

[14] Kandidat, jer nismo ustanovili konzistentnost.

POGLAVLJE 4

Kooperativne igre

U prva dva poglavlja bavili smo se igrama kod kojih igrači nisu surađivali, već je svaki igrač analizom mogućih strategija svojih suparnika odabira strategije koje maksimiziraju njegovu korisnost.

U ovom ćemo se poglavlju baviti igrama kod kojih igrači mogu surađivati te samim time dolaziti do boljih ishoda nego u situacijama u kojima bi svaki radio za sebe.

4.1. Igre s pogodbom

PRIMJER 4.1. Vlasnik kuće i potencijalni kupac pregovaraju o cijeni. Kuća vrijedi jedan (milijun) dolara za prodavatelja, ali vrijedi $1 + s$ (milijuna dolara) za kupca. Stoga je dogovorena cijena $1 + p$ za neki $p \in [0, s]$.

Ako postignu dogovor o cijeni p, tada će korisnost za kupca biti p, a korisnost za prodavatelja bit će $s - p$.

Međutim, prodavatelj već ima ponudu od $1+d_1$. Ako pregovori propadnu, prodavač može prihvatiti svoju alternativnu ponudu, što rezultira korisnošću d_1 za prodavatelja i 0 za kupca.

Po kojoj cijeni možemo očekivati da će se pregovori završiti?

DEFINICIJA 4.2. **Igra s pogodbom** s n igrača je uređeni par (S, d) pri čemu je $S \subset \mathbf{R}^n$ konveksan, zatvoren i ograničen skup, a $d \in S$ točka takva da postoji $x \in S$ takav da je $x > d$. [1] Skup S nazivamo **izvedivim skupom**, a d **točkom neslaganja**.

U igri s pogodbom igrači se nastoje odlučiti za neku izvedivu točku $x \in S$ koja će predstavljati korisnosti koje će igrači dobiti. Ukoliko do dogovora ne dođe, dobit će korisnosti u skladu s točkom neslaganja d (što zbog uvjeta da postoji $x \in S$ takav da $x > d$ sigurno nije optimalno što igrači iz igre mogu dobiti).

Skup svih igara s pogodbom s n igrača označavat ćemo s $\mathcal{B}^n$.

PRIMJER 4.3. Dva igrača trebaju međusobno raspodijeliti litru vina. Prvi igrač od t litara ima korisnost t, a drugi igrač korisnost $\sqrt{t}$. Ukoliko ne dođe do dogovora nitko ne dobiva ništa. Budući da je ukupno na raspolaganju jedna litra, izvedivi skup je

$$S = \{x \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \leqslant x_1, x_2 \text{ i } x_1 + x_2^2 \leqslant 1\},$$

dok je $d = (0, 0)$.

Prirodno pitanje koje se postavlja je na koji način odabrati neku izvedivu točku $x \in S$ koja će biti na neki način smisleni izbor za rješenje pogodbe. Prvi bitan odgovor na to pitanje dao je Nash [**Nas50**] kojemu je ključna ideja bila uspostaviti vezu između rješenja *bliskih* pogodbi. Malo preciznije, Nash je uveo nekoliko kriterija preko kojih je zahtijevao da bliske pogodbe imaju bliska rješenja te koristeći te kriterije došao do načina kako rješavati specifične konkretne pogodbe.

DEFINICIJA 4.4. **Rješenje pogodbe** s n igrača je funkcija $F \colon \mathcal{B}^n \to \mathbf{R}^n$ koje svakoj igri s pogodbom $(S, d) \in \mathcal{B}^n$ pridružuje neku pripadnu izvedivu točku $F(S, d) \in S$.

[1] Pisat ćemo $a < b$ ukoliko je $a_i < b_i$ za svaku koordinatu i.

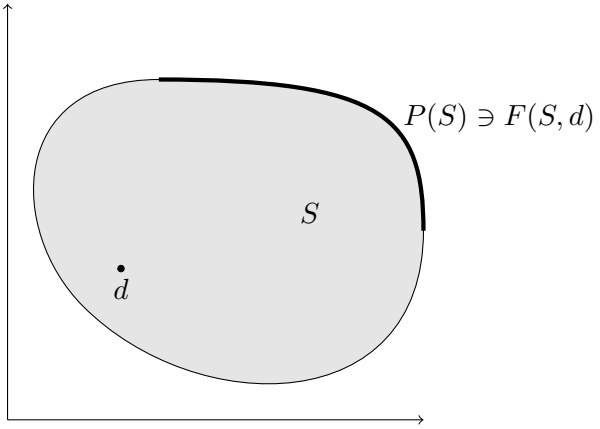
4.2. Nashovo rješenje pogodbe

Pređimo sada na četiri prethodno spomenuta Nashova kriterija – to su redom Pareto optimalnost, simetrija, kovarijantnost sa skalom i nezavisnost od nebitnih alternativa. Bitno je za spomenuti da svaki od ova četiri kriterija možemo u nekoj mjeri smatrati smislenim i logičnim zahtjevom koji bismo mogli postaviti za neko *dobro* rješenje pogodbe.

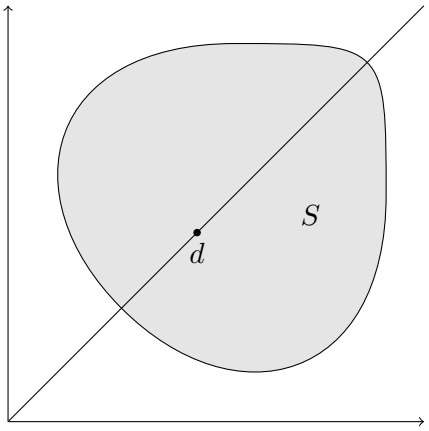
Za neki $(S,d) \in \mathcal{B}^n$ **Pareto optimalne točke skupa** S su one točke za koje se korisnost niti jednog igrača ne može povećati bez da se smanji korisnost nekog drugog igrača. Drugim riječima,

$$P(S) = \{x \in S\colon \text{ako je } y \geqslant x \text{ za neki } y \in S \text{ tada je } y = x\},$$

je skup Pareto optimalnih točaka skupa S. Rješenje pogodbe F je **Pareto optimalno** ako svakoj igri s pogodbom pridružuje neku Pareto optimalnu točku u S, tj. ako je $F(S,d) \in P(S)$ za sve $(S,d) \in \mathcal{B}^n$.



Za igru $(S,d) \in \mathcal{B}^n$ reći ćemo da je **simetrična** ako je $\pi(S) = S$ i $\pi(d) = d$ za sve permutacije π skupa N. Za rješenje pogodbe F reći ćemo da je **simetrično** ako je $\pi(F(S,d)) = F(S,d)$ za sve simetrične igre $(S,d) \in \mathcal{B}^n$ i sve permutacije π skupa N.[2] Drugim riječima, simetrično rješenje pogodbe sve igrače u simetričnim igrama tretira jednako, tj. predviđa im iste korisnosti.



Uočimo da ako je rješenje pogodbe F Pareto optimalno i simetrično, tada je $F(S,d)$ jednoznačno određeno za svaku simetričnu igru s pogodbom (S,d) – intuitivno, radi se o točki presjeka pravca $(x,\dots,x)$ i *gornje-desnog*[3] ruba skupa S.

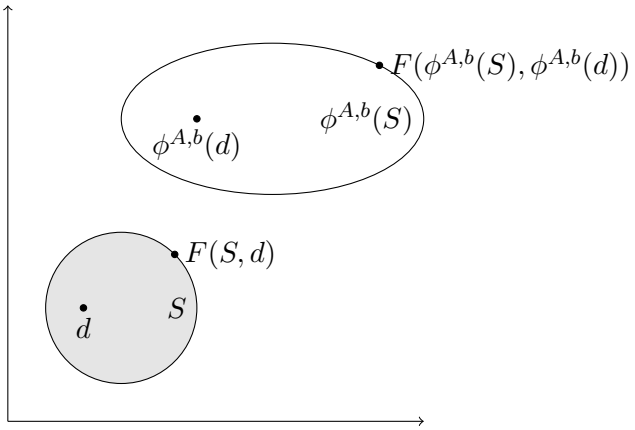
Uvjet kovarijantnosti sa skalom traži da rješenje pogodbe ne ovisi na ikoji bitan način o odabiru skale. Drugim riječima, ako moguće korisnosti jednog igrača promijenimo tako da ih sve pomnožimo s nekim pozitivnim realnim brojem (u praksi to odgovara, npr. promjeni mjerne jedinice), rješenje pogodobe treba se promijeniti samo tako da reflektira tu malu promjenu. To formaliziramo na sljedeći način.

[2] Naravno, za neki $x \in \mathbf{R}^n$ je $\pi(x) = x$ za sve permutacije π ako i samo ako su sve koordinate točke x jednake.
[3] *Gornje-desni* rub ima smisla jedino u dvodimenzionalnom slučaju, ali očekujemo da će pažljivi čitatelj sam dokučiti višedimenzionalnu analogiju.

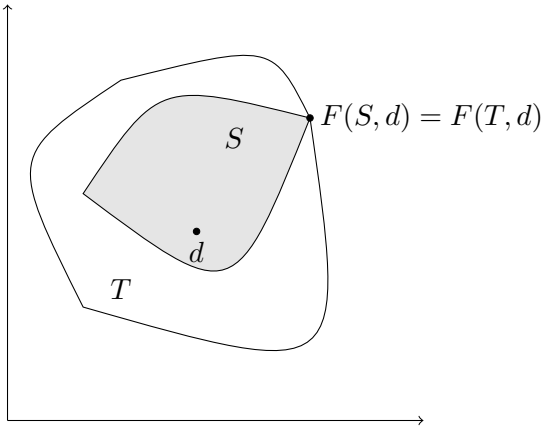
Za dijagonalnu $n \times n$ matricu A s pozitivnim elementima na dijagonali i $b \in \mathbf{R}^n$ definirajmo afino preslikavanje $\phi^{A,b}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tako da je $\phi^{A,b}(x) = Ax + b$. Ako za sve takve A i b i sve igre $(S, d) \in \mathcal{B}^n$, rješenje pogodbe F zadovoljava

$$F(\phi^{A,b}(S), \phi^{A,b}(d)) = \phi^{A,b}(F(S, d)), \tag{4.1}$$

reći ćemo da je F **kovarijantno sa skalom**.



Posljednji kriterij (nezavisnost od nebitnih alternativa) je donekle kontroverzan i komentirat ćemo kasnije zašto bi ga ponekad mogli smatrati neopravdanim. Prije toga ćemo ga uvesti gledajući na njega kao na, bar donekle, smisleni zahtjev. Pretpostavimo da imamo dvije igre (S, d) i (T, d), te neka je $S \subset T$. Neka je $z = F(T, d)$ rješenje pogodbe u igri (T, d). Pretpostavimo da je $z \in S$. Tada je donakle logično tražiti da mora biti i $F(S, d) = z$ – ako je z bio najbolji kompromis u izvedivom skupu T čini se da nema jakog razloga zašto to i dalje ne bi bio najbolji kompromis ako iz skupa T izbacimo neke mogućnosti, tj. *stisnemo* ga do skupa S. Dakle, za rješenje pogodbe F reći ćemo da je **nezavisno od nebitnih alternativa** ako je $F(S, d) = F(T, d)$ za sve igre (S, d) i (T, d) za koje je $S \subset T$ i $F(T, d) \in S$.



Sada prelazimo na Nashovo rješenje pogodbe. To rješenje uvest ćemo čisto analitički, a potom ćemo dati njegovu aksiomatsku karakterizaciju u kontekstu četiri prethodno navedena kriterija.

Za proizvoljnu igru s pogodbom $(S, d) \in \mathcal{B}^n$ neka je $S_d = \{x \in S\colon x \geqslant d\}$ i

$$g_{S,d}(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - d_i). \tag{4.2}$$

Definicija 4.5. **Nashovo rješenje pogodbe** (s n igrača) je rješenje pogodbe $\mathrm{NA}\colon \mathcal{B}^n \to \mathbf{R}^n$ dano s

$$\mathrm{NA}(S, d) = \operatorname*{argmax}_{x \in S_d} g_{S,d}(x).$$

Prirodno pitanje koje se postavlja je – je li prethodna definicija uopće korektna, tj. postiže li se maksimum doista u jedinstvenoj točki?

PROPOZICIJA 4.6. *Neka je $(S,d)\in\mathcal{B}^n$ proizvoljna igra s pogodbom. Funkcija $g_{S,d}\colon S_d\to\mathbf{R}$ postiže maksimum u točno jednoj točki, a vrijednost maksimuma je pozitivna.*

DOKAZ. $g_{S,d}$ postiže maksimum budući da se radi o neprekidnoj funkciji na kompaktnom skupu (S_d). Taj maksimum je očito pozitivan, budući da iz definicije igre s pogodbom znamo da postoji $x\in S_d$ takav da je $x>d$.

Pretpostavimo sada da funkcija $g_{S,d}$ postiže maksimum u dvije različite točke z i z'. Tada je

$$\begin{aligned}\log g_{S,d}\left(\frac{z+z'}{2}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{(z_i-d_i)+(z_i'-d_i)}{2}\right)\\&>\sum_{i=1}^{n}\frac{\log(z_i-d_i)+\log(z_i'-d_i)}{2}=\frac{\log g_{S,d}(z)+\log g_{S,d}(z')}{2},\end{aligned}$$

pri čemu nejednakost slijedi zbog stroge konkavnosti logaritamske funkcije. Međutim, budući da je $(z+z')/2\in S_d$, dobivena nejednakost je u kontradikciji s pretpostavkom da se u točkama z i z' postiže maksimum. □

Prelazimo na najavljenu aksiomatsku karakterizaciju Nashovog rješenja pogodbe.

TEOREM 4.7. *Neka je $F\colon\mathcal{B}^n\to\mathbf{R}^n$ neko rješenje pogodbe. Tada je F Nashovo rješenje pogodbe ako i samo ako je Pareto optimalno, simetrično, kovarijantno sa skalom i nezavisno od nebitnih alternativa.*

ZADATAK 4.1. Dokažite da Nashovo rješenje pogodbe NA zadovoljava sva četiri svojstva iz iskaza teorema.

DOKAZ. Za drugi smjer implikacije, pretpostavimo da je F rješenje pogodbe koje je Pareto optimalno, simetrično, kovarijantno sa skalom i nezavisno od nebitnih alternativa. Neka je $(S,d)\in\mathcal{B}^n$ i $z=\mathrm{NA}(S,d)$. Uzmimo dijagonalnu matricu

$$A=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{z_1-d_1},\dots,\frac{1}{z_n-d_n}\right).$$

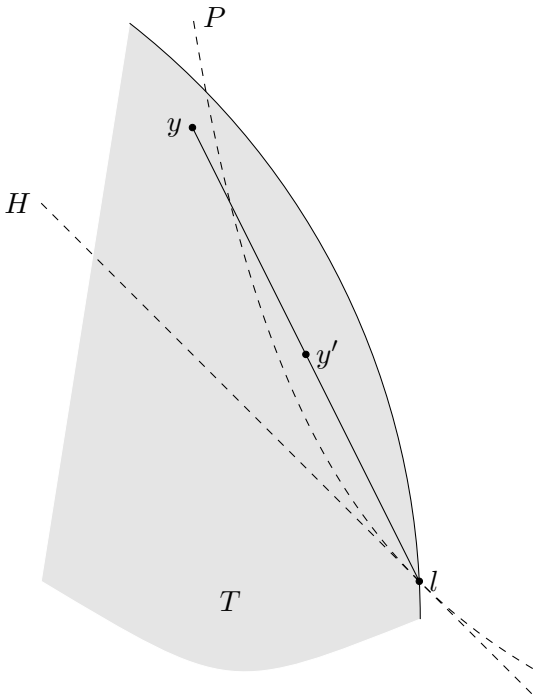
i točku

$$b=-\left(\frac{d_1}{z_1-d_1},\dots,\frac{d_n}{z_n-d_n}\right),$$

te neka je $\phi^{A,b}$ kao u (4.1) i $T=\phi^{A,b}(S)$. Zbog kovarijantnosti sa skalom Nashovog rješenja pogodbe, imamo

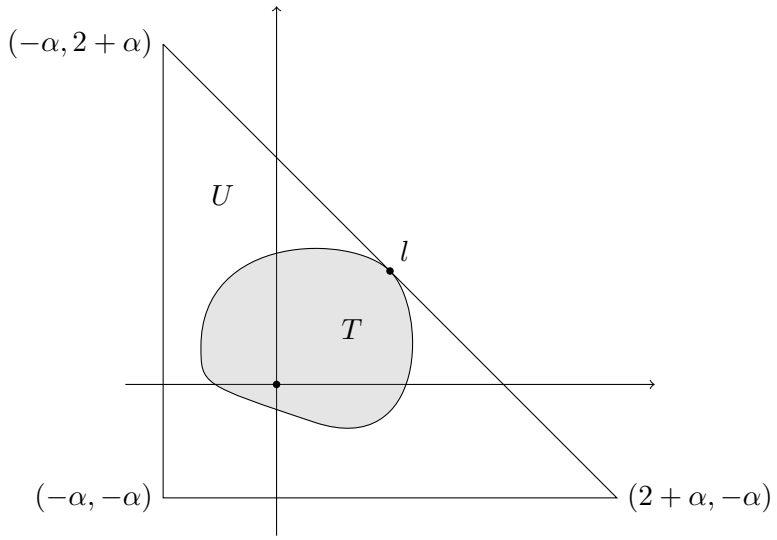
$$\mathrm{NA}(T,0)=\mathrm{NA}(\phi^{A,b}(S),\phi^{A,b}(d))=\phi^{A,b}(\mathrm{NA}(S,d))=\phi^{A,b}(z)=(1,\dots,1).$$

Označimo točku iza posljednje jednakosti s l. Koristeći kovarijanost sa skalom rješenja pogodbe F vidimo da je, da bi pokazali $F(S,d)=\mathrm{NA}(S,d)$, dovoljno pokazati da je $F(T,0)=l$. Neka je $H\subset\mathbf{R}^n$ hiperravnina dana jednadžbom $x_1+\dots+x_n=n$, a P ploha dana jednadžbom $x_1\dots x_n=1$, te uočimo da je H tangencijalna hiperravnina plohe P u točki l.



Dokažimo da se cijeli skup T nalazi s iste strane hiperravnine H. U suprotnom, postoji točka $y \in T$ koja se nalazi s iste strane kao i ploha P. Uočimo da na dužini koja spaja y i l mora postojati neka točka y' za koju je $y'_1 \dots y'_n > 1$. Doista, u suprotnom bi pravac koji spaja y i l imao svojstvo da prolazi kroz neku točku plohe P (točka l), ali ne prolazi kroz oba dijela prostora $\mathbf{R}^n$ koja odvaja ploha P. Samim time, taj bi pravac tangirao plohu P, odnosno bio dio hiperravnine H, što znamo da nije slučaj. Uočimo da za prethodno navedenu točku y' imamo $g_{T,0}(y') > 1 = g_{T,0}(l)$, što je u kontradikciji s time da je $l = \mathrm{NA}(T, 0)$.

Neka je U konveksna ljuska n točaka kojima su sve koordinate jednake $-\alpha$, osim jedne koja je jednaka $n + (n-1)\alpha$,[4] te točke $(-\alpha, \dots, -\alpha)$. Uočimo da za α možemo odabrati dovoljno veliki pozitivan broj tako da je $T \subset U$. Zbog simetričnosti i Pareto optimalnosti rješenja pogodbe F i simetričnosti igre s pogodbom $(U, 0)$ nužno je $F(U, 0) = l$. Međutim, iz nezavisnosti od nebitnih alternativa sada imamo da je i $F(T, 0) = l$, što smo i htjeli pokazati.



□

[4] Uočimo da sve te točke leže na hiperravnini H.

ZADATAK 4.2. (a) Za igru s pogodbom (S, d) s $S \subset \mathbf{R}^n$, definiramo rješenje

$$M(S,d) = \operatorname{argmax}_{x \in S_d} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i - d_i}.$$

Dokažite da je rješenje M jedinstveno određeno.

(b) Koje od četiri Nashova kriterija zadovoljava rješenje M? (Opravdajte svoje odgovore.)

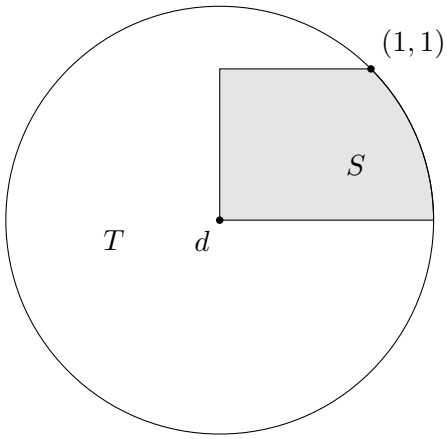
(c) Neka je $d = (0,0)$, $T = \{(x,y) : x, y \in [0,2], x+y \leqslant 3\}$ i $S = \{(x,y) : x, y \in [0,2], 2x+y \leqslant 4\}$. Dokažite da vrijedi $S \subset T$. Nađite $M(T,d)$ i $M(S,d)$.

Rješenje. (b) Sva osim kovarijantnosti

4.3. Kalai-Smorodinskyjevo rješenje pogodbe

Neki autori nisu u potpunosti uvjereni u opravdanost kriterija nezavisnosti od nebitnih alternativa, te zbog toga predlažu neka druga rješenja pogodbe, među kojima je najpoznatije Kalai–Smorodinskyjevo [**KS75**]. Pokažimo najprije na primjeru moguću kontroverznost nezavisnosti od nebitnih alternativa.

PRIMJER 4.8. Neka je $S = \{x \in \mathbf{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2, x_1 \geqslant 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$, $T = \{x \in \mathbf{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2\}$ te $d = (0,0)$.



Uočimo da je zbog simetričnosti i Pareto optimalnosti $\mathrm{NA}(T,d) = (1,1)$, pa je onda zbog nezavisnosti od nebitnih alternativa i $\mathrm{NA}(S,d) = (1,1)$. Međutim, može se argumentirati da takva raspodjela korisnosti neće jednako usrećiti oba igrača – maksimalna korisnost kojoj se drugi igrač nadao je bila 1, dok je kod prvog igrača maksimalna korisnost kojoj se mogao nadati bila jednaka $\sqrt{2}$. Dakle, drugi igrač nije mogao proći bolje, dok je prvi igrač ostao osjetno ispod maksimuma kojeg je mogao dobiti.

Ovaj primjer nas motivira da se odreknemo kriterija nezavisnosti od nebitnih alternativa te potražimo rješenje pogodbe koje će uzeti u obzir maksimalne zahtjeve svih igrača.

Za proizvoljnu igru s pogodbom $(S,d) \in \mathcal{B}^n$ točku $u(S,d) \in \mathbf{R}^n$ takvu da je

$$u_i(S,d) = \max_{x \in S_d} x_i, \quad \text{za sve } i \in N$$

nazivamo njenom **točkom utopije**.

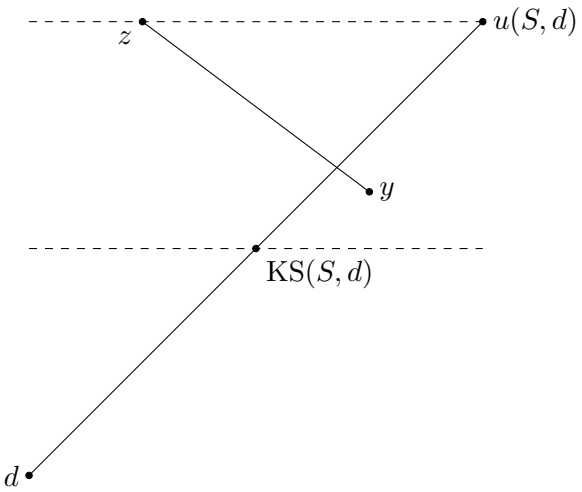
DEFINICIJA 4.9. **Kalai–Smorodinskyjevo rješenje pogodbe** (s n igrača) je rješenje pogodbe $\mathrm{KS} \colon \mathcal{B}^n \to \mathbf{R}^n$ takvo da da je, za svaku igru s pogodbom (S,d), $\mathrm{KS}(S,d)$ točka na segmentu koji spaja d i $u(S,d)$ najbliža točki $u(S,d)$.

Slično kao što smo to učinili u Teoremu 4.7 za Nashovo rješenje pogodbe, tako i Kalai-Smorodinskyjevo rješenje pogodbe možemo pokušati aksiomatski karakterizirati. To ćemo i učiniti u slučaju igara s pogodbom s dva igrača tako da u ostatku ovog poglavlja radimo s tom dodatnom pretpostavkom.

Nije teško vidjeti da Kalai-Smorodinskyjevo rješenje zadovoljava neke od kriterija koje smo naveli i kada smo uvodili Nashovo rješenje.

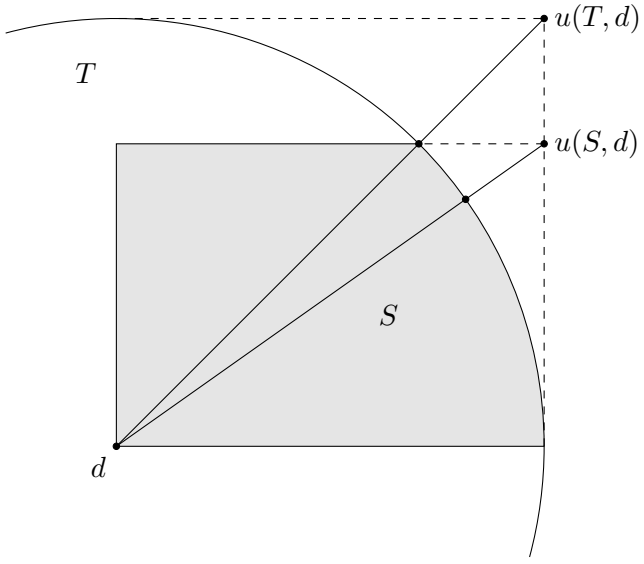
ZADATAK 4.3. Dokažite da je Kalai-Smorodinskyjevo rješenje Pareto optimalno, simetrično i kovarijantno sa skalom.
Napomena. S obzirom na definiciju KS, potrebno je koristiti geometrijske argumente.

Rješenje. Na primjer, pokažimo da je KS (u slučaju s dva igrača) Pareto optimalno. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $y \in S$ takva da je $y \geqslant \mathrm{KS}(S,d)$, ali $y \neq \mathrm{KS}(S,d)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se y nalazi ispod segmenta koji spaja d i točku utopije $u(S,d)$. Tada postoji točka $z \in S$ takva da je $z_2 = u_2(S,d)$. Sada možemo zaključiti da će segment koji spaja y i z (i koji se zbog konveksnosti nalazi u S) morati sijeći segment koji spaja $\mathrm{KS}(S,d)$ i $u(S,d)$ u točki koja nije $\mathrm{KS}(S,d)$, a to će sjecište biti točka u S koja je bliža točki $u(S,d)$ nego što je to $\mathrm{KS}(S,d)$.



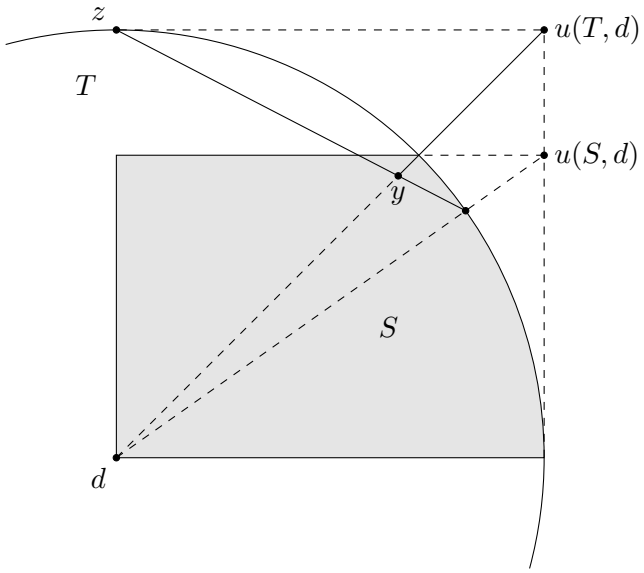
Da je KS simetrično se vidi iz činjenice da je za simetrične skupove nužno $u_1(S,d) = u_2(S,d)$. KS je i kovarijantno sa skalom što se također može pokazati koristeći opažanje da afina preslikavanja segment koji spaja d i $u(S,d)$ transformiraju na isti način (kovarijantno) kao i skup S.

Međutim, KS nije nezavisno od nebitnih alternativa, kao što je vidljivo iz Primjera 4.8.



Kriterij nezavisnosti od nebitnih alternativa zamijenit ćemo kriterijom individualne monotonosti. Za rješenje pogodbe $F\colon \mathcal{B}^2 \to \mathbf{R}^2$ s dva igrača reći ćemo da je **individualno monotono** ako je $F_j(S,d) \leqslant F_j(T,d)$ za sve $(S,d),(T,d) \in \mathcal{B}^2$ i $i \neq j$ takve da je $S \subset T$ i $u_i(S,d) = u_i(T,d)$.

Nije teško za uvjeriti se da je Kalai-Smorodinskyjevo rješenje individualno monotono. Neka su $(S,d),(T,d) \in \mathcal{B}^2$ takve da je $S \subset T$ te pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $u_1(S,d) = u_1(T,d)$. Tada je, zbog $S \subset T$, sasvim sigurno $u_2(S,d) \leqslant u_2(T,d)$ pa se segment koji spaja d i $u(T,d)$ nalazi iznad segmenta koji spaja d i $u(S,d)$. Neka je $z \in T$ takva da je $z_2 = u_2(T,d)$, te neka je y sjecište segmenta koji spaja d i $u(T,d)$, te segmenta koji spaja $\mathrm{KS}(S,d)$ i z. Potonji segment se zbog konveksnosti nalazi u T, pa je i $y \in T$. Sada možemo zaključiti da se $\mathrm{KS}(T,d)$ nalazi na segmentu koji spaja y i $u(T,d)$, a *budući da se taj segment nalazi u potpunosti iznad $\mathrm{KS}(S,d)$*, možemo zaključiti da $\mathrm{KS}_2(T,d) \geqslant \mathrm{KS}_2(S,d)$.



Teorem 4.10. *Neka je $F\colon \mathcal{B}^2 \to \mathbf{R}^2$ neko rješenje pogodbe s dva igrača. Tada je F Kalai-Smorodinskyjevo rješenje pogodbe ako i samo ako je Pareto optimalno, simetrično, kovarijantno sa skalom i individualno monotono.*

Dokaz. Jedan smjer smo već pokazali. Pretpostavimo sada da je $F\colon \mathcal{B}^2 \to \mathbf{R}^2$ neko rješenje pogodbe s dva igrača koje je Pareto optimalno, simetrično, kovarijantno sa skalom i individualno monotono.

Neka je $(S,d) \in \mathcal{B}^2$. Uzmimo dijagonalnu matricu

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{u_1(S,d) - d_1}, \frac{1}{u_2(S,d) - d_2}\right).$$

i točku

$$b = -\left(\frac{d_1}{u_1(S,d) - d_1}, \frac{d_2}{u_2(S,d) - d_2}\right),$$

te neka je $\phi^{A,b}$ kao u (4.1) i $T = \phi^{A,b}(S)$. Zbog kovarijantnosti sa skalom Kalai-Smorodinskyjevog rješenja pogodbe i rješenja pogodbe F, imamo

$$\mathrm{KS}(T,0) = \mathrm{KS}(\phi^{A,b}(S), \phi^{A,b}(d)) = \phi^{A,b}(\mathrm{KS}(S,d))$$

i

$$F(T,0) = F(\phi^{A,b}(S), \phi^{A,b}(d)) = \phi^{A,b}(F(S,d)).$$

Budući da je $\phi^{A,b}$ injekcija, da bi pokazali da je $F(S,d) = \mathrm{KS}(S,d)$ dovoljno je pokazati da je $F(T,0) = \mathrm{KS}(T,0)$.

Uočimo da smo $\phi^{A,b}$ odabrali na način da je $u(T,0) = (1,1)$, pa slijedi da je $\mathrm{KS}_1(T,0) = \mathrm{KS}_2(T,0)$.

Neka je

$$m = \min_{x \in T, i=1,2} x_i$$

minimalna vrijednost koja se pojavljuje među koordinatama točaka iz T. Definirajmo skup

$$\overline{T} = \{x \in \mathbf{R}^2 \colon (m,m) \leqslant x \leqslant y \text{ za neki } y \in T\}.$$

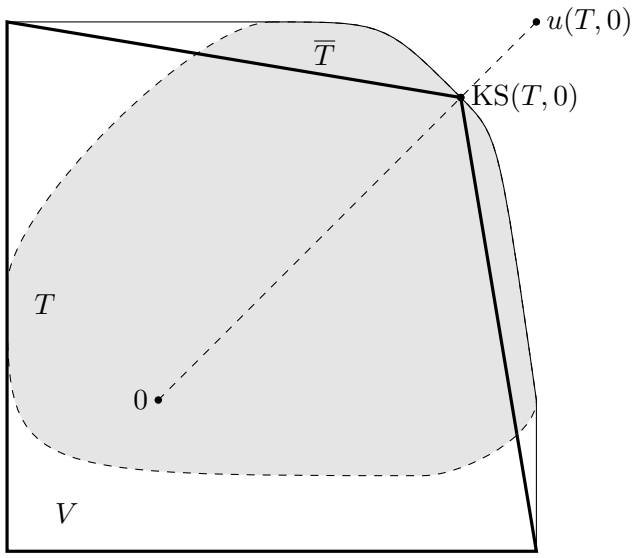
Vrijedi $T \subset \overline{T}$ i $u(\overline{T},0) = (1,1) = u(T,0)$ pa je zbog individualne monotonosti[5]

$$F(\overline{T},0) \geqslant F(T,0). \tag{4.3}$$

Nadalje, budući da se 0, $(1,1)$, $\mathrm{KS}(T,0)$ i $\mathrm{KS}(\overline{T},0)$ nalaze na istom pravcu, iz $T \subset \overline{T}$ slijedi da je $\mathrm{KS}(\overline{T},0) \geqslant \mathrm{KS}(T,0)$. Iz definicije skupa $\overline{T}$, postoji $z \in T$ takav da je $z \geqslant \mathrm{KS}(\overline{T},0)$ pa je onda i $z \geqslant \mathrm{KS}(T,0)$. Koristeći Pareto optimalnost rješenja KS slijedi da je $z = \mathrm{KS}(T,0)$, pa je onda i

$$\mathrm{KS}(\overline{T},0) = \mathrm{KS}(T,0). \tag{4.4}$$

Neka je $V = \mathrm{conv}((m,m),(m,1),(1,m),\mathrm{KS}(T,0))$.



Skup V je simetričan, pa iz simetričnosti i Pareto optimalnosti rješenja pogodbe F slijedi $F(V,0) = \mathrm{KS}(T,0)$. Budući da je $V \subset \overline{T}$ i $u(V,0) = (1,1) = u(\overline{T},0)$ iz individualne monotonosti slijedi da je

$$F(\overline{T},0) \geqslant F(V,0) = \mathrm{KS}(T,0) = \mathrm{KS}(\overline{T},0).$$

Koristeći Pareto optimalnost rješenja KS sada možemo zaključiti da je $F(\overline{T},0) = \mathrm{KS}(\overline{T},0)$.

Međutim, iz ove jednakosti te nejednakosti (4.3) i (4.4) slijedi da je $F(T,0) \leqslant \mathrm{KS}(T,0)$. Iz Pareto optimalnosti rješenja F sada dobivamo da je $F(T,0) = \mathrm{KS}(T,0)$. □

Zadatak 4.4. Neka je (T,d) igra s pogodbom s dva igrača, pri čemu je $d = (0,0)$ i T je konveksna ljuska točaka $(0,0),(1,0),(1/2,1)$ i $(0,1)$.
(a) Pronađite $\mathrm{NA}(T,d)$ i $\mathrm{KS}(T,d)$.
(b) Pronađite igru (S,d) s $S \subset T$ koja pokazuje da Nashovo rješenje pogodbe *nije* individualno monotono.

Iako se Kalai-Smorodinskyjevo rješenje pogodbe i koncept individualne monotonosti lako mogu poopćiti i na slučajeve s više od dva igrača, prethodni teorem tada više neće vrijediti. Štoviše, može se pokazati [**Rot79**] da za svaki $n \geqslant 3$ ne postoji rješenje pogodbe s n igrača koje je Pareto optimalno, simetrično i individualno monotono.

[5] U biti individualnu monotonost koristimo dvaput – jednom da iz $u_1(T,0) = u_1(\overline{T},0)$ zaključimo da je $F_2(\overline{T},0) \geqslant F_2(T,0)$, te drugi put da iz $u_2(T,0) = u_2(\overline{T},0)$ zaključimo da je $F_1(\overline{T},0) \geqslant F_1(T,0)$.

PRIMJER 4.11. Ana i Branko trebaju podijeliti zajedno zarađenih 12 kuna, a ako se ne uspiju dogovoriti kako će to učiniti i jedno i drugo ostat će praznih džepova. Pretpostavimo da Ana od t kuna ima korisnost $2t$, a Branko $3t$.

(a) Koliko kuna bi trebao dobiti Branko ako bi se dijelilo u skladu s Nashom?
(b) Koliko kuna bi trebao dobiti Branko ako bi se dijelilo u skladu s Kalaijem i Smorodinskyjem?

Rješenje. Primijetimo da je $d = (0, 0)$. Ako je Anina korisnost x, tada je ona dobila $x/2$ kuna. To znači da Branko može dobiti najviše $12 - x/2$ kuna, pa njegova korisnost y zadovoljava

$$y \leqslant 3\left(12 - \frac{x}{2}\right).$$

Dakle, izvedivo područje je

$$S = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, 2y + 3x \leqslant 72\}.$$

Korištenjem kovarijantnosti sa skalom, simetrije i Pareto optimalnosti (konkretnije, preslikavanjem na recimo $S' = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$.), možemo bez računa dobiti

$$\mathrm{NA}(S, d) = \mathrm{KS}(S, d) = (12, 18).$$

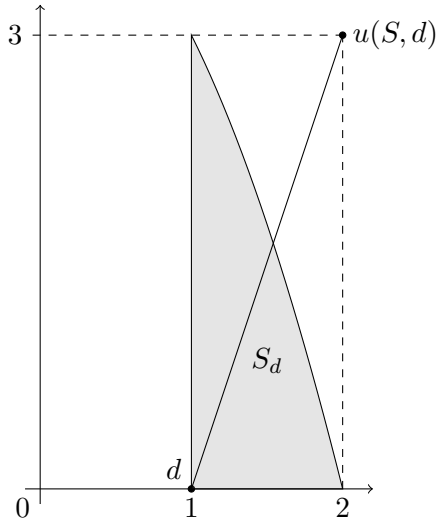
Ta točka ($x = 12$) odgovara podjeli u kojoj je Ana dobila 6 i Branko 6 kuna.

Naravno, možemo i izračunati $\mathrm{NA}(S, d)$ i $\mathrm{KS}(S, d)$ iz definicija NA i KS.

PRIMJER 4.12. Neka je (S, d) igra s pogodbom s dva igrača takva da je $d = (1, 0)$ i

$$S_d = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 3, 1 \leqslant x\}.$$

Odredimo $\mathrm{NA}(S, d)$ i $\mathrm{KS}(S, d)$.



Definirajmo funkciju $g_{S,d} \colon S_d \to \mathbf{R}$ kao u (4.2) s

$$g_{S,d}(x, y) = (x - 1)y.$$

Ona postiže maksimum negdje na *gornje desnom rubu* (ono što je dio parabole). Zbog toga promatramo funkciju $\overline{g}_{S,d} \colon [1, 2] \to \mathbf{R}$ definiranu s

$$\overline{g}_{S,d}(x) = (x - 1)(4 - x^2) = -x^3 + x^2 + 4x - 4.$$

Iz $\overline{g}'_{S,d}(x) = -3x^2 + 2x + 4$ dobivamo da je $(1 + \sqrt{13})/3$ jedinstvena stacionarna točka funkcije $\overline{g}_{S,d}$, a računanjem druge derivacije vidimo da je to točka u kojoj se postiže maksimum. Pripadna vrijednost

koordinate y je $(22-2\sqrt{13})/9$, pa je

$$\mathrm{NA}(S,d)=\left(\frac{1+\sqrt{13}}{3},\frac{22-2\sqrt{13}}{9}\right).$$

Odredimo još i $\mathrm{KS}(S,d)$. Točka utopije je $u(S,d)=(2,3)$, pa je jednadžba pravca koji spaja d i u

$$y=3x-3.$$

$\mathrm{KS}(S,d)$ će biti sjecište tog pravca i ruba skupa S_d koji pripada paraboli. Lakim računom dobivamo

$$\mathrm{KS}(S,d)=\left(\frac{\sqrt{37}-3}{2},\frac{3\sqrt{37}-15}{2}\right).$$

ZADATAK 4.5. Ana i Branka trebaju podijeliti jednu pizzu, a ako se ne uspiju dogovoriti kako će to učiniti, pizza će se pokvariti i nitko neće dobiti ništa. Pretpostavimo da Ana od količine pizze t ima korisnost $3\sqrt{t}$, a Branka $2\sqrt{t}$.

(a) Odredite izvedivo područje i točku neslaganja ove igre.
(b) Definirajte točku utopije igre s pogodbom, i odredite točku utopije ove igre.
(c) Koliko pizze bi trebala dobiti Ana ako bi se dijelilo u skladu s Nashom?
(d) Koliko pizze bi trebala dobiti Ana ako bi se dijelilo u skladu s Kalaijem i Smorodinskyjem?

Rješenje. Elipsa $u_1^2/4+u_2^2/9\leqslant 1$, $d=(0,0)$.

ZADATAK 4.6. (a) Promatrajmo igru s pogodbom (S,d) sa dva igrača čije je izvedivo područje S konveksna ljuska točaka $(-1,4),(6,2),(5,5)$ i $(2,7)$, a točka neslaganja $d=(16/5,9/2)$. Nađite skup Pareto optimalnih točaka područja S.
(b) Nađite Nashovo rješenje za igru (S,d).
(c) Nađite KS rješenje za igru (S,d).

Bibliografija

[Ber83] Joseph Bertrand: *Review of "Theorie mathematique de la richesse sociale" and "Recherche sur les principes mathematiques de la theorie des richesses"*. Journal de Savants, 67 :499—-508, 1883. 11

[che] *Chess statistics*. https://www.chessgames.com/chessstats.html. 60

[Cou38] Antoine Cournot: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. L. Hachette, 1838. 9

[Far80] Henry S. Farber: *An analysis of final-offer arbitration*. The Journal of Conflict Resolution, 24(4):683–705, 1980. http://www.jstor.org/stable/173781. 13

[GDGJFJ10] J. González-Díaz, I. García-Jurado i M.G. Fiestras-Janeiro: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010, ISBN 9780821851517. https://books.google.hr/books?id=P4yDAwAAQBAJ. v, 14, 16

[Har68] Garrett Hardin: *The tragedy of the commons*. Science, 162(3859):1243–1248, 1968. https://science.sciencemag.org/content/162/3859/1243. 11

[KS75] Ehud Kalai i Meir Smorodinsky: *Other solutions to Nash's bargaining problem*. Econometrica, 43(3):513–18, 1975. 77

[Led81] Alain Ledoux: *Concours résultats complets. Les victimes se sont plu à jouer le 14 d'atout*. Jeux & Stratégie, 10 :10, 1981. http://download.abandonware.org/magazines/Jeux%20et%20Strategie/jeuxetstrategie_numero010/JS10%2010.jpg. 6

[Llo33] William Forster Lloyd: *Two lectures on the checks to population*. 1833. 11

[Nas50] John Nash: *The Bargaining Problem*. Econometrica, 18(2):155–162, April 1950. https://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v18y1950i2p155-162.html. 72

[Pet08] Hans Peters: *Game Theory: A Multi-Leveled Approach*. Springer Berlin Heidelberg, 2008, ISBN 9783540692911. v, 26

[Rot79] Alvin E. Roth: *An impossibility result concerning n-person bargaining games*. Internat. J. Game Theory, 8(3):129–132, 1979. https://doi.org/10.1007/BF01770063. 80

[Sch05] Astrid Schou: *Gæt-et-tal konkurrence afslører at vi er irrationelle*. Politiken, (22. rujna), 2005. http://politiken.dk/oekonomi/art5698526/G%C3%A6t-et-tal-konkurrence-afsl%C3%B8rer-at-vi-er-irrationelle. 6

[SW01] Ulrich Schwalbe i Paul Walker: *Zermelo and the early history of game theory*. Games and Economic Behavior, 34(1):123 – 137, 2001. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825600907942. 60