

VEKTORSKI PROSTORI

Pismeni ispit - 20. veljače 2026.

1. (a) **(7 bodova)** Definirajte poluprost operator. Dokažite da je operator A poluprost ako i samo ako je

$$\mu_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_s),$$

za neke $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ međusobno različite.

- (b) **(7 bodova)** Definirajte hermitski operator. Iskažite i dokažite teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora.

2. **(14 bodova)** U ovisnosti o parametrima $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ odredite minimalni polinom i Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadanog u kanonskoj bazi (e) matričnim zapisom

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Za koje vrijednosti α, β je operator dijagonalizabilan?

3. **(14 bodova)** Zadan je operator $A \in L(\mathbb{C}^{10})$ s minimalnim polinomom

$$\mu_A(x) = (x^2 - 1)^2.$$

Zapišite funkciju operatora $\frac{A}{A^2 + I}$ (ako postoji) kao polinom u A .

4. **(14 bodova)** Neka je $\mathcal{P}_2$ unitaran prostor realnih polinoma stupnja najviše 2 sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Promotrimo funkcional $\varphi \in (\mathcal{P}_2)^*$ zadan formulom $\varphi(p) := p'(0)$.

(a) Nađite polinom $r \in \mathcal{P}_2$ takav da $\varphi(p) = \langle p, r \rangle$ za sve $p \in \mathcal{P}_2$.

(b) Nađite ortonormiranu bazu za $\ker \varphi$.

5. **(14 bodova)** Na unitarnom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom zadan je operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ svojom matricom

$$A(f) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

u bazi

$$(f) = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Dokažite da je A unitaran operator te odredite neku ortonormiranu bazu (g) za $\mathbb{C}^3$ takvu da je $A(g)$ dijagonalna matrica.