

VEKTORSKI PROSTORI

Pismeni ispit - 28. kolovoza 2026.

1. (a) **(6 boda)** Definirajte poluprost i nilpotentan linearni operator. Iskažite teorem o aditivnom Jordanovu rastavu linearnog operatora na konačno-dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru.
- (b) **(8 bodova)** Definirajte pozitivan hermitski operator. Iskažite i dokažite teorem o postojanju i jedinstvenosti pozitivnoga hermitskog kvadratnog korijena takvog operatora.

2. **(14 bodova)** Za matricu $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, definiramo operator $T \in L(M_2(\mathbb{C}))$ formulom

$$T(X) := NX - XN.$$

Dokažite da je T nilpotentan te odredite njegov indeks nilpotentnosti, Jordanovu formu i jednu Jordanovu bazu.

3. Neka je $A \in L(\mathbb{C}^n)$ operator s minimalnim polinomom

$$\mu_A(x) = (x - 1)^2(x + 1)$$

i neka je $B := (A^2 + I)^{-1}$.

- (a) **(7 bodova)** Dokažite da je B dobro definiran te ga zapišite kao polinom u A .
 - (b) **(7 bodova)** Odredite spektar i minimalni polinom operatora B .
4. Neka je $\mathcal{P}_2$ unitaran prostor realnih polinoma stupnja najviše 2 sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle := p(-1)q(-1) + 2p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Promotrimo funkcional $\varphi \in (\mathcal{P}_2)^*$ zadan formulom

$$\varphi(p) := p(0) + p'(0).$$

- (a) **(7 bodova)** Nađite polinom $r \in \mathcal{P}_2$ takav da $\varphi(p) = \langle p, r \rangle$ za svaki $p \in \mathcal{P}_2$.
 - (b) **(7 bodova)** Odredite najbolju aproksimaciju polinoma $1 + t$ polinomima iz $\ker \varphi$ te udaljenost polinoma $1 + t$ od $\ker \varphi$.
5. **(14 bodova)** Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom zadan je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojom matricom

$$A(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

u bazi

$$(f) = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Dokažite da je A pozitivan operator te odredite matricu njegovog pozitivnog drugog korijena $\sqrt{A}$ u zadanoj bazi (f) . Objasnite zašto činjenica da matrica $A(f)$ nije simetrična nije u kontradikciji s pozitivnošću operatora A .