5. Neka je $N \in L(\mathbb{C}^5)$ operator zadan matrično u kanonskoj bazi (e) s

$$N(e) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je N nilpotentan, odredite mu indeks nilpotentnosti, Jordanovu klijetku i neku njegovu Jordanovu bazu.

Rj. Neka je $v := Ne_1 = (2, -1, 1, 1, 0)$ i $w := Ne_3 = (0, 0, 2, 1, 1)$. Primijetimo da je $Ne_4 = Ne_5 = -w$ i da je $Ne_2 = 2v - e_3 - e_4$. Stoga, za novu bazu uzimamo:

$$(e') = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5) := (e_1, v, e_3, e_3 + e_4, w).$$

Kako je $Nv = e_3 + e_4$, $N(e_3 + e_4) = w - w = 0$ i $Nw = 2Ne_3 + Ne_4 + Ne_5 = 2w - w - w = 0$, imamo

$$Ne'_1 = e'_2, \quad Ne'_2 = Nv = e_3 + e_4 = e'_4, \quad Ne'_3 = w = e'_5, \quad Ne'_4 = 0, \quad Ne'_5 = 0.$$

Dakle,

$$N(e') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada lako računamo

$$N^2(e') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N^3(e') = 0.$$

Dakle, N je nilpotentan i $\operatorname{ind} N = 3$. Isto tako, lako vidimo $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, tj. $d_0 = 0$, $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, $d_3 = d_4 = 5$. Iz toga lako imamo:

$$n_1 = 2d_1 - d_0 - d_2 = 0$$
$$n_2 = 2d_2 - d_1 - d_3 = 1$$
$$n_3 = 2d_3 - d_2 - d_4 = 1$$

(a $n_4 = n_5 = 0$ jer je $\operatorname{ind} N = 3$; provjera: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$). Dakle, imamo jednu klijetku veličine 2 i jednu veličine 3:

$$\mathcal{J}(N) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pronađimo sada Jordanovu bazu:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Ker} N^3 \dot{-} \operatorname{Ker} N^2 & f_5 & \\ \operatorname{Ker} N^2 \dot{-} \operatorname{Ker} N & f_4 & f_2 \\ \operatorname{Ker} N \dot{-} \{0\} & f_3 & f_1 \end{array}$$

Iz $N^2(e')x(e') = (0,0,0,x_1,0)$ slijedi $\operatorname{Ker} N^2 = \{x_1 = 0\} = [e'_2, e'_3, e'_4, e'_5]$, a iz $N(e')x(e') = (0,x_1,0,x_2,x_3)$ slijedi $\operatorname{Ker} N = \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\} = [e'_4, e'_5]$. Dovoljno je uzeti $f_5 = e'_1 \in \operatorname{Ker} N^3 \dot{-} \operatorname{Ker} N^2$ pa je $f_4 = Nf_5 = e'_2$ i $f_3 = Nf_4 = e'_4$. Za drugi lanac uzmimo $f_2 = e'_3 \in \operatorname{Ker} N^2 \dot{-} \operatorname{Ker} N$ (nezavisan s f_4 modulo $\operatorname{Ker} N$), pa je $f_1 = Nf_2 = e'_5$. Vektori $f_1 = e'_5$ i $f_3 = e'_4$ čine bazu od $\operatorname{Ker} N$, što potvrđuje da je izbor dobar. Dakle, Jordanova baza je

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (e'_5, e'_3, e'_4, e'_2, e'_1) = (w,\, e_3,\, e_3 + e_4,\, v,\, e_1).$$

Provjera: $Nf_1 = 0$, $Nf_2 = f_1$, $Nf_3 = 0$, $Nf_4 = f_3$, $Nf_5 = f_4$, što daje upravo $\mathcal{J}(N)$.