3. REDOVI POTENCIJA

Neka je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ red potencija, $r = \sup\{|x| : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergira}\}$,

zovemo ga radijus konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Označimo:

$$\text{(R1)} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{(R2)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \text{(R3)} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad .$$

Teorem

(1) Redovi R1, R2 i R3 imaju isti radijus konvergencije.
(2) Ako je $r > 0$ radijus konvergencije reda R1 onda svi redovi apsolutno konvergiraju za svaki x, $|x| < r$ i divergiraju za svaki x, $|x| > r$.
(3) Ako je $\rho = \lim\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ tada je $r = \frac{1}{\rho}$.
(4) Redovi R1, R2 i R3 definiraju funkcije na $\langle -r, \ r \rangle$ te vrijedi da je R2 derivacija, a R3 primitivna funkcija od R1.

1) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad r = 1.$

2) $\sin x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \quad r = \infty.$

3) $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad r = \infty.$

4) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad r = \infty.$

5) $\mathrm{arctg} x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}, \quad r = 1.$

6) $(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n, \quad r = 1.$

7) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad r = 1.$

3.1. Odredite radijus konvergencije sljedećih redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+5} x^n,$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n,$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n,$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} x^n,$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n,$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n,$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n} x^n,$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^n} x^n.$

3.2. Odredite radijus konvergencije sljedećih redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}} x^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) x^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-2)^n) x^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+1} x^n$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n(n+1)} x^n$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3 + \left(\frac{1}{n}\right)^n}$.

3.3. Razvijte u red potencija sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = x \sin x^2$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

(c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Uputa: koristite $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$.

3.4. Neka je $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Pokažite da je $f''(x) = f(x)$.

3.5. Neka je $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Pokažite da je $x^2 f''(x) + x f'(x) = 4x^2 f(x)$.

3.6. Neka je $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$. Pokažite da je $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na $\langle -r, r \rangle$, gdje je r radijus konvergencije zadanog reda.

Rješenja

3.1. Odredite radijus konvergencije sljedećih redova:

(a) $r = 1$,
(b) $r = 0$,
(c) $r = e$,
(d) $r = 1$,
(e) $r = 2$,
(f) $r = \frac{1}{4}$,
(g) $r = 2$,
(h) $r = \infty$.

3.2. Odredite radijus konvergencije sljedećih redova:

(a) $r = \frac{e^3}{27}$,
(b) $r = 1$,
(c) $r = \frac{1}{2}$,
(d) $r = \infty$,
(e) $r = 1$,
(f) $r = \frac{1}{2}$,
(g) $r = 1$.

3.3. (a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{4m-1}}{(2m-1)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n+1}$.