

4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
5. Ako matrica A ima bilo koja dva retka (stupca) proporcionalna, onda je $\det A = 0$.
6. Neka su $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ matrice sa svojstvom da je za neki redak $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & i = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & i \neq k \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n,$$

onda je $\det C = \det A + \det B$.

7. (analogno za stupce)

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & j = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & j \neq k \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tada je $\det C = \det A + \det B$.

8. Ako A ima nulredak ili nulstupac, onda je $\det A = 0$.
9. Općenito $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
10. Ako je matrica B dobivena iz matrice A dodavanjem nekom retku (stupcu) matrice A linearne kombinacije ostalih redaka (stupaca) matrice A , onda je $\det B = \det A$.
11. Ako je neki redak (stupac) matrice A jednak linearnoj kombinaciji preostalih redaka (stupaca) matrice A , onda je $\det A = 0$.
12. $\det I = 1$.
- 13.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Ukratko: pri računanju determinante koristimo **elementarne transformacije** nad matricom A :

1. Zamjena dva retka (stupca) u A ,
2. Množenje nekog retka (stupca) u A skalarom $\lambda \neq 0$,
3. Pribrajanje s -tom retku (stupcu) u A r -tog retka (stupca) od A pomnoženog s $\lambda \in \mathbb{F}$.

ZADATAK 4.1. Ponovo izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} &\stackrel{I \leftrightarrow III}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{I \cdot (-5) + II}{=} \stackrel{I \cdot (-2) + III}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -17 & -13 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{II \cdot (-1)}{=} \stackrel{III \cdot (-1)}{=} \stackrel{II \leftrightarrow III}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 17 & 13 \end{vmatrix} \stackrel{II \cdot (-17) + III}{=} \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \cdot (1 \cdot 7 \cdot 40) = 40 \end{aligned}$$

□

4.1 Laplaceov razvoj determinante

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$. Tada je

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, a Δ_{ij} je determinanta matrice $(n-1)$ -og reda koja nastaje uklañanjem i -tog retka i j -tog stupca iz originalne matrice A .

Jednakost (4.1) se zove **Laplaceov razvoj po i -tom retku**, a (4.2) se zove **Laplaceov razvoj po j -tom stupcu**. Determinanta Δ_{ij} se naziva **subdeterminanta** ili **minora** matrice A određena elementom a_{ij} . Broj A_{ij} se naziva **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa a_{ij} matrice A .

ZADATAK 4.2. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

razvojem po prvom retku.

RJEŠENJE

$$\begin{vmatrix} 4^+ & -3^- & 5^+ \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 66 + 3 \cdot (-23) + 5 \cdot (-19) = 100.$$

□

ZADATAK 4.3. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

razvojem po drugom stupcu.

RJEŠENJE

$$\begin{vmatrix} a & b^- & c \\ c & a^+ & b \\ b & c^- & a \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = -b(ca - b^2) + a(a^2 - bc) - c(ab - c^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

□

DZ 4.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

DZ 4.2.

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc + x(ab + ac + bc)$$

DZ 4.3.

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$$

DZ 4.4.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & c & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = xyzuv$$

DZ 4.5.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

DZ 4.6. Neka su $x, y, z \neq 0$. Dokažite bez računanja determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Kao poseban slučaj se može raspisati kad je bilo koji od x, y, z jednak 0. Slijedi rješenje za slučaj $x, y, z \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{II \cdot (yz) \\ III \cdot (xz) \\ IV \cdot (xy)}}{=} \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ xyz & 0 & yz^2 & y^2 z \\ xyz & xz^2 & 0 & x^2 z \\ xyz & xy^2 & x^2 y & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{I:(xyz) \\ II:x \\ III:y \\ IV:z}}{=} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 z^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

DZ 4.7. Sami si zadavati determinante i provjeravati na www.wolframalpha.com.

4.2 Metode računanja determinanti n -tog reda

4.2.1 Svođenje na trokutasti oblik

ZADATAK 4.4. Izračunajte:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Prvi redak pomnožen s -1 ćemo dodati svim ostalima.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \text{gornjetrokutasti oblik} = (-1)^{n-1}.$$

ZADATAK 4.5. Izračunajte:

$$D(a_1, \dots, a_n; x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Ako su neka dva od a_1, \dots, a_n jednaka x , onda matrica ima dva jednaka retka pa je njena determinanta 0. Ako je $a_k = x$, za samo jedan k , pretpostavimo da je to a_1 pa imamo

$$\begin{aligned} D(x, a_2, \dots, a_n; x) &= \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{prvi redak pomnožen s -1}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} \\ &= x(a_2 - x)(a_3 - x) \cdots (a_n - x). \end{aligned}$$

Analogno

$$D(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n; x) = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{k-1} - x)x(a_{k+1} - x) \cdots (a_n - x).$$

Ako je $a_i \neq x$, za sve $i = 1, \dots, n$, onda imamo

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n; x) &= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{prvi redak pomnožen s -1}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} \stackrel{\text{izlučimo } a_k - x}{=} \\ &= \prod_{k=1}^n (a_k - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{sve stupce dodamo}}{=} \\ &= \prod_{k=1}^n (a_k - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} + x \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^n (a_k - x) \left(1 + x \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k - x} \right). \end{aligned}$$

□

ZADATAK 4.6. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{prvi redak dodamo svakom drugom}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

ZADATAK 4.7. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Primijetimo da je ovaj zadatak specijalni slučaj Zadatka 4.5 pa uvrštavanjem u formulu koju smo tamo izveli dobivamo:

$$D_n = \prod_{k=1}^n (3-2) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{3-2} \right) = 2n + 1.$$

No, riješit ćemo zadatak i direktno:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{prvi redak oduzmemo od ostalih}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{prvom stupcu dodamo preostale stupce}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 3 + (n-1)2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2(n-1) = 2n + 1. \end{aligned}$$

ZADATAK 4.8. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Računamo po definiciji:

$$D_n = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

Od cijele sume ostaje jedino sumand pridružen permutaciji $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ koja ima $I(p) = n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ inverzija:

$$D_n = (-1)^{I(p)} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n. \tag{4.3}$$

Determinantu smo mogli izračunati i tako da je svedemo na dijagonalni oblik pomoću zamjena stupaca (prvog i zadnjeg, drugog i predzadnjeg, itd...). Takvih zamjena treba napraviti $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pa je

$$D_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Uvjerite se da je to jednako kao i (4.3). □

ZADATAK 4.9. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = \min\{i, j\}$, $i, j = 1, \dots, n$.

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{prvi redak pomnožen s } (-k) \\ \text{dodajemo } k\text{-tom retku} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{matrix} \text{razvijemo po} \\ \text{zadnjem stupcu} \end{matrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} = 1. \end{aligned}$$

□

ZADATAK 4.10. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = |i - j|$, $i, j = 1, \dots, n$.

RJEŠENJE Uočimo da je

$$|i - j| = \begin{cases} i - j, & i > j \text{ (donji trokut matrice } A) \\ 0, & i = j \text{ (dijagonala matrice } A) \\ j - i, & i < j \text{ (gornji trokut matrice } A) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & n-5 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{zadnji stupac} \\ \text{dodajemo preostalima} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-3 & n-1 \\ n-1 & n-2 & n-1 & n & \dots & 2n-5 & n-2 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-2 & \dots & 2n-7 & n-3 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{iz prvog stupca} \\ \text{izlučimo } n-1 \end{array} \\
&= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-3 & n-1 \\ 1 & n-2 & n-1 & n & \dots & 2n-5 & n-2 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-2 & \dots & 2n-7 & n-3 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{prvi stupac pomnožen s } n-k \\ \text{dodajemo } k\text{-tom stupcu} \end{array} \\
&= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-4 & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-6 & n-2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2n-8 & n-3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{razvijemo po} \\ \text{zadnjem retku} \end{array} \\
&= (-1)^{n+1} (n-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-4 & n-1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-6 & n-2 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2n-8 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (n-1) \cdot 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

ZADATAK 4.11. Neka su $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ proizvoljni brojevi. Izračunajte tzv. **Vandermondeovu**¹

¹Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

determinantu:

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$D(a_1, \dots, a_n) =$ poništimo prvi stupac ispod dijagonale najprije množimo $(n-1)$ redak s $-a_1$ i dodajemo zadnjem

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_1) & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$=$ množimo $(n-2)$ redak s $-a_1$ i dodajemo predzadnjem

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \dots & a_{n-1}^{n-3} & a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & a_3^{n-3}(a_2 - a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-3}(a_2 - a_1) & a_n^{n-3}(a_2 - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_1) & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$=$ postupak ponavljamo dok ne poništimo 1. stupac ispod dijagonale

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_{n-1} - a_1 & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_{n-1}(a_{n-1} - a_1) & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-4}(a_2 - a_1) & a_3^{n-4}(a_3 - a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-4}(a_{n-1} - a_1) & a_n^{n-4}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & a_3^{n-3}(a_3 - a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1} - a_1) & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_1) & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$=$ razvijemo determinantu po prvom stupcu i iz k -tog stupca izlučimo faktor $a_k - a_1, \forall k \geq 2$

$$= \prod_{k=2}^n (a_k - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \dots & a_{n-1}^{n-3} & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^n (a_k - a_1) D(a_2, \dots, a_n).$$

Dobili smo determinantu istog tipa kao i početnu pa i kod nje radimo isti postupak. Dobivamo

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n) &= \prod_{k=2}^n (a_k - a_1) \prod_{k=3}^n (a_k - a_2) D(a_3, \dots, a_n) \\ &= \dots = \prod_{k=2}^n (a_k - a_1) \prod_{k=3}^n (a_k - a_2) \cdots \prod_{k=n-1}^n (a_k - a_{n-2}) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (a_j - a_i). \end{aligned}$$

Očito je $D = 0$ ako i samo ako je $a_i = a_j$, za neke $i \neq j$.

DZ 4.8. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = \max\{i, j\}$, $i, j = 1, \dots, n$.

DZ 4.9. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} n.$$

4.2.2 Metoda rekurzivnih relacija

Ideja ove metoda je da se determinanta n -tog reda, razvojem po nekom retku ili stupcu, zapiše kao linearna kombinacija determinanti reda $n-1$ i $n-2$ istog oblika.

Neka je $D_n \in \mathbb{F}$ determinanta n -tog reda, $n > 2$, i neka su $D_{n-1}, D_{n-2} \in \mathbb{F}$ determinante $(n-1)$ i $(n-2)$ reda, ali istog oblika kao D_n . Pretpostavimo da je

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

gdje su p, q konstante neovisne o n . Razlikujemo dva slučaja.

1. $q = 0$

Tada je $D_n = pD_{n-1}$ pa je

$$D_n = pD_{n-1} = p^2D_{n-2} = \dots = p^{n-2}D_2.$$

U ovom slučaju je niz determinanti (D_n) zapravo geometrijski niz s kvocijentom p .

2. $q \neq 0$

Za ovaj slučaj pogledajmo karakterističnu jednadžbu rekurzivne relacije

$$D_n - pD_{n-1} - qD_{n-2} = 0.$$

To je kvadratna jednadžba $x^2 - px - q = 0$. Neka su α, β njeni korijeni. Prema Vièteovim formulama je

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q.$$

Sada relaciju (4.4) možemo pisati na dva načina

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \quad (4.5)$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}). \quad (4.6)$$

Razlikujemo dva slučaja:

(a) $\alpha \neq \beta$

Iteriranjem jednadžbi (4.5) i (4.6) dobivamo

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}) = \alpha^2 (D_{n-2} - \beta D_{n-3}) = \dots = \alpha^{n-2} (D_2 - \beta D_1), \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2 (D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \dots = \beta^{n-2} (D_2 - \alpha D_1). \end{aligned}$$

Dobili smo jednadžbe

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha^{n-2} (D_2 - \beta D_1), \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta^{n-2} (D_2 - \alpha D_1). \end{aligned}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s α , drugu s $-\beta$ pa ih zbrojimo:

$$(\alpha - \beta)D_n = \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1).$$

Jer je $\alpha \neq \beta$, možemo pisati

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta},$$

odnosno

$$D_n = \underbrace{\frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}}_{=C_1} \alpha^n + \underbrace{\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}}_{=C_2} \beta^n, \quad n \geq 2. \quad (4.7)$$

(b) $\alpha = \beta$

Sada su (4.5) i (4.6) jedna te ista relacija

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), \quad n \geq 2, \quad (4.8)$$

pa je

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \alpha^2 (D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \dots = \alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1).$$

Dakle,

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1). \quad (4.9)$$

Ta relacija vrijedi i za D_{n-1} pa je

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \alpha^{n-3} (D_2 - \alpha D_1),$$

tj. $D_{n-1} = \alpha^{n-3} (D_2 - \alpha D_1) + \alpha D_{n-2}$. Uvrstimo u (4.9) i dobivamo:

$$D_n = \alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) + \alpha^2 D_{n-2} + \alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) = 2\alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) + \alpha^2 D_{n-2}. \quad (4.10)$$

Ako u (4.9) umjesto n stavimo $n - 2$, dobivamo

$$D_{n-2} - \alpha D_{n-3} = \alpha^{n-4} (D_2 - \alpha D_1)$$

pa je $D_{n-2} = \alpha^{n-4} (D_2 - \alpha D_1) + \alpha D_{n-3}$. Ovo uvrstimo u (4.10):

$$D_n = 2\alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) + \alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) + \alpha^3 D_{n-3}.$$

Postupak ponavljamo i na kraju dobivamo

$$D_n = (n - 1)\alpha^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) + \alpha^{n-1} D_1. \quad (4.11)$$

NAPOMENA 4.4. Primijetimo da ako su $p, q, D_1, D_2 \in S$, gdje je $S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, tada je i $D_n \in S$.

ZADATAK 4.12. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} D_n &= \text{razvijemo determinantu po prvom stupcu} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \text{razvijemo drugu determinantu po prvom retku} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= D_{n-1} + D_{n-2}. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - x - 1 = 0$. Njeni korijeni su

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Kako je $D_1 = |1| = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$\begin{aligned} D_n &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1 - \sqrt{5}}{2} (-\sqrt{5})} \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Uočimo da je, iako se možda ne bi reklo iz ovog izraza, $D_n \in \mathbb{N}$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

NAPOMENA 4.5. Ne moramo znati točnu formulu da bismo odredili D_n , već je dovoljno samo znati da je ona oblika $D_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ (ili $D_n = A \cdot \alpha^n + Bn \cdot \alpha^{n-1}$ ako je $\alpha = \beta$) pa onda uvrštavanjem konkretnih vrijednosti determinanti D_1 i D_2 za $n = 1, 2$ (ako to ima smisla) dobijemo 2×2 sustav iz kojeg kao nepoznanice dobijemo konstante A i B . Ako iz nekog razloga ne možemo uvrstiti D_1 ili D_2 , onda krenemo od najmanjeg n za kojeg vrijednosti D_n i D_{n+1} imaju smisla. Također primijetite

da formulu $D_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ možemo zapisati i u nekom drugom obliku koji vodi na jednostavniji sustav. Na primjer, ako je $D_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot \beta^{n-1}$, uvrštavanjem D_n za $n = 1, 2$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} A + B = D_1 \\ \alpha A + \beta B = D_2 \end{cases}.$$

□

DZ 4.10. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} D_n &= \text{razvijemo determinantu po prvom retku} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{7}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \text{razvijemo drugu determinantu po prvom stupcu} = 5\tilde{D}_{n-1} - \frac{7}{2} \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\tilde{D}_{n-1} - 14\tilde{D}_{n-2}. \end{aligned}$$

Sad ćemo izračunati $\tilde{D}_n, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = \text{razvijemo determinantu po prvom stupcu} = 3\tilde{D}_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \text{razvijemo drugu determinantu po prvom retku} = 3\tilde{D}_{n-1} - 2\tilde{D}_{n-2}. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - 3x + 2 = 0$. Njeni korijeni su $\alpha = 1, \beta = 2$.

Kako je $\tilde{D}_1 = |3| = 3, \tilde{D}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$D_n = \frac{1^n(7 - 2 \cdot 3)}{1(1 - 2)} + \frac{2^n(7 - 1 \cdot 3)}{2(2 - 1)} = 2^{n+1} - 1.$$

Konačno,

$$D_n = 5(2^n - 1) - 14(2^{n-1} - 1) = 9 - 2^{n+1}.$$

□

ZADATAK 4.13. Izračunajte:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} D_{2n} &= \text{razvijemo po prvom stupcu} = a \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{vmatrix} \\ &= \text{obje determinate razvijemo po zadnjem stupcu} = a^2 D_{2(n-1)} - (-1)^{2n} b^2 D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)} \\ &= (a^2 - b^2)^2 D_{2(n-2)} = \dots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2 = (a^2 - b^2)^n. \end{aligned}$$

ZADATAK 4.14. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ n-3 & 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} D_n &= \text{razvoj po prvom retku} = n \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ n-3 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= nx^{n-1} + D_{n-1} = \text{rekurzivno dalje} = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + D_{n-2} \\ &= \dots = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 3x^2 + D_2 \\ &= \sum_{k=3}^n kx^{k-1} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \sum_{k=3}^n kx^{k-1} + 2x + 1 = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Pojednostavit ćemo posljednji izraz koristeći da je $(\sum_{k=0}^n x^k)' = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. S druge strane je

$$\left(\sum_{k=0}^n x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

□

DZ 4.11. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

RJEŠENJE Razvoj po prvom retku pa po prvom stupcu pa je

$$D_n = -D_{n-2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}.$$

□

DZ 4.12. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

RJEŠENJE Ako je n paran, onda 2., 4., ..., n . redak pomnožen s -1 dodajemo prvom i dobijemo nulredak pa je $\det D_{2k} = 0$.

Ako je n neparan, onda istim postupkom dobijemo gornjetrokutasti oblik i $\det D_{2k+1} = 1$.

□

DZ 4.13. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

RJEŠENJE Determinantu razvijemo po prvom stupcu i dobijemo

$$D_n = D_{n-1} - 2D_{n-1} = -D_{n-1}$$

pa je $D_n = (-1)^{n-1}$.

□

ZADATAK 4.15. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix}$$

ako je $x \neq y$.

RJEŠENJE Koristimo se trikom pomoću kojeg ćemo D_n izraziti na dva načina. Prisjetimo se sljedećeg pravila za računanje determinanti:

Ako su $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ matrice sa svojstvom da je za neki redak $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & i = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & i \neq k \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n,$$

onda je $\det C = \det A + \det B$.

Analogna tvrdnja vrijedi za stupce.

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a - y + y \end{vmatrix} = \text{rastavimo determinantu} \\ &\quad \text{po zadnjem retku} = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a - y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & y \end{vmatrix} \\ &= \text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,} \\ &\quad \text{a u drugoj izlučimo } y \text{ iz zadnjeg retka} = (a - y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \text{poništimmo gornji trokut množeći} \\ &\quad \text{zadnji redak s } -x = (a - y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a - x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y - x & a - x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y - x & y - x & a - x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y - x & y - x & y - x & \dots & a - x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a - y)D_{n-1} + y(a - x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Sada koristimo drugi rastav.

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a-x+x \end{vmatrix} \stackrel{\text{rastavimo determinantu po zadnjem retku}}{=} \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} \\
 &= \begin{matrix} \text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,} \\ \text{a u drugoj izlučimo } x \text{ iz zadnjeg stupca} \end{matrix} = (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & 1 \\ y & a & x & \dots & x & 1 \\ y & y & a & \dots & x & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a & 1 \\ y & y & y & \dots & y & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{matrix} \text{poništimmo donji trokut množeći} \\ \text{zadnji stupac s } -y \end{matrix} = (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a-y & x-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & a-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & 0 & a-y & \dots & x-y & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Dobili smo

$$\begin{aligned}
 D_n &= (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1}, \\
 D_n &= (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu relaciju s $a-x$, drugu s $-(a-y)$ pa zbrojimo i dobivamo

$$[(a-x) - (a-y)] D_n = (a-x)^n y - (a-y)^n x,$$

tj.

$$D_n = \frac{y(a-x)^n - x(a-y)^n}{y-x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako je $x = y$, onda je ovo Zadatak 4.5. □

DZ 4.14. Izračunajte:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ b & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1-ab)^n.$$

DZ 4.15.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} = (2n-1)(n-1)^{n-1}.$$

DZ 4.16.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$$

DZ 4.17.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} (n-2)!.$$

DZ 4.18.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

DZ 4.19.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (5^{n+1} - 2^{n+1}).$$

4.2.3 Binet–Cauchyjev teorem

ČINJENICE 4.6. 1. Prisjetimo se Laplaceovog razvoja

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ algebarski komplement elementa a_{ij} .

2. Vrijedi

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{il} = 0, \quad j \neq l \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0, \quad i \neq k \tag{4.13}$$

3. Za $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$, definiramo **adjunkt**

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gdje je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij} .

4. Vrijedi

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = (\det A) I. \quad (4.14)$$

5. Binet–Cauchyjev teorem: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

6. Posljedice:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$A \text{ je regularna} \Leftrightarrow \det A \neq 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

7. U dokazu Binet–Cauchyjevog teorema koristimo

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B,$$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Na lijevoj strani su determinant blok–matrica, pri čemu su A i B kvadratne matrice, ne nužno istih redova.

ZADATAK 4.16. Nađite $\det \tilde{A}$ i $\tilde{(\tilde{A})}$, za regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$.

RJEŠENJE Iz (4.14) dobivamo

$$\det A \cdot \det \tilde{A} \stackrel{BC}{=} \det(A \cdot \tilde{A}) = \det((\det A) I) = (\det A)^n \det I = (\det A)^n$$

pa je $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$. Posebno je \tilde{A} regularna ako je A regularna. Nadalje,

$$\tilde{A} \cdot \tilde{(\tilde{A})} = (\det \tilde{A}) I = (\det A)^{n-1} I \quad / \cdot A \text{ (s lijeva)}$$

$$A \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{(\tilde{A})} = (\det A)^{n-1} A$$

$$\tilde{(\tilde{A})} = (\det A)^{n-2} A.$$

□

ZADATAK 4.17. Dokažite da je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ regularna i odredite A^{-1} .

RJEŠENJE Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$. Ako $\det A$ razvijemo po trećem stupcu, odmah vidimo da je $\det A = 1 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

ZADATAK 4.18 (Posljedice Binet–Cauchyjevog teorema).

a) Za $A_1, A_2, \dots, A_r \in M_n(\mathbb{F})$, $r \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_r) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_r.$$

b) Za $A \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det A^r = (\det A)^r$, $r \in \mathbb{N}$.

c) Za $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det AB = \det BA$.

d) Ako je $A \in O(n, \mathbb{F})$, onda je $\det A = \pm 1$.

e) Ako je $A \in U(n)$, onda je $|\det A| = 1$.

RJEŠENJE

a) indukcijom po r

d) A je ortogonalna ako i samo ako je $AA^T = A^T A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2.$$

e) A je unitarna ako i samo ako je $AA^* = A^* A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det(AA^*) = \det A \cdot \det \overline{A^T} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2.$$

NAPOMENA 4.7. Tvrdnja za determinantu blok–trokutaste matrice indukcijom se proširuje i na proizvoljan broj blokova pa vrijedi:

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22} \cdots \det A_{nn} = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

pri čemu su $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ kvadratni blokovi.

ZADATAK 4.19. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica. Nađite $\det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Iskoristimo tvrdnju o determinanti blok–trokutastih matrica i način na koji se množe blok–matrice. Vrijedi

$$\det \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det I \cdot \det I = 1.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \stackrel{BC}{=} \det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

jer matrica $\begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}$ ima nulstupac.

ZADATAK 4.20. Izračunajte $\det \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$, gdje je D kvadratna matrica.

RJEŠENJE Koristimo $\det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det I \cdot \det I = 1$ pa je

$$\det \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} \stackrel{BC}{=} \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D - CB \end{pmatrix} = \det I \cdot \det(D - CB) = \det(D - CB).$$

□

DZ 4.20. Izračunajte $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix}$, gdje je A kvadratna matrica.

RJEŠENJE Opet koristimo $\det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = 1$ pa je

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix} \stackrel{BC}{=} \det \begin{pmatrix} A - BC & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \det(A - BC) \cdot \det I = \det(A - BC).$$

□

ZADATAK 4.21. Neka za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AB = BA$ te neka je A regularna. Odredite $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$ i primijetimo da je $\det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A$.

Stoga je

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det A} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \\ &\stackrel{BC}{=} \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & DA - CB \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot \det(DA - CB) = \det(DA - CB). \end{aligned}$$

□

DZ 4.21. Neka za matrice $A, C \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AC = CA$ te neka je A regularna. Dokažite da je tada

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Uputa: $\det A = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \neq 0$. Matricu $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ s lijeva množimo s $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}$.