Prva zadaća
Rok predaje: 9.5.2022.

1. Definiramo preslikavanje na prostoru $C_c^\infty(\mathbb{R})$ s

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \big(\varphi(1/n) - \varphi(-1/n)\big).$$

   (a) Dokažite da je T distribucija reda 1.

   (b) Pokažite da je $\operatorname{supp} T = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

2. Definiramo preslikavanje $Pf\frac{1}{x^2} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ s

$$\langle Pf\frac{1}{x^2}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right].$$

   a) Dokažite da je $Pf\frac{1}{x^2}$ dobro definirano preslikavanje.

   b) Dokažite da je distribucija reda 2.

   c) Dokažite da vrijedi $(p.v.\frac{1}{x})' = -Pf\frac{1}{x^2}$.

3. Odredite limese sljedećih nizova u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

   (a) $A_n = \cos(n^2 x)$,

   (b) $B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{1/n}$.

4. Neka je $P(D) = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{d^k}{dx^k}$ linearni diferencijalni operator s konstantnim (kompleksnim) koeficijentima. Pokažite da su tada jedina distribucijska rješenja jednadžbe $P(D)T = 0$ zapravo C^∞ funkcije, odnosno

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad P(D)T = 0 \implies T \in C^\infty(\Omega).$$

   Uputa: Faktorizirajte $P(D)$.