Zadaci 4

ODJ

0.1 Egzaktne jednadžbe

Zadatak 1. Svedite ODJ na egzaktne i riješite ih:

1. $e^y\,dx + (2y + xe^y)\,dy = 0$,
2. $(1 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$,
3. $(y^2 + 3xy^3)\,dx + (1 - xy)\,dy = 0$.

Rješenje. 1. Imamo $P(x,y) = e^y$ i $Q(x,y) = 2y + xe^y$ pa je

$$\frac{dP}{dy} = e^y, \qquad \frac{dQ}{dx} = e^y$$

odakle vidimo da je jednadžba već egzaktna. Tražimo funkciju $U(x,y)$ takvu da je

$$\frac{dU}{dx} = e^y, \qquad \frac{dU}{dy} = 2y + xe^y.$$

Integriranjem prve jednadžbe po x dobivamo

$$U(x,y) = xe^y + f(y)$$

za neku funkciju f koja ovisi samo o y. Tada iz druge jednadžbe slijedi

$$2y + xe^y = \frac{dU}{dy} = xe^y + f'(y) \implies f'(y) = 2y \implies f(y) = y^2 + C$$

pa za funkciju U možemo uzeti

$$U(x,y) = xe^y + y^2.$$

Sada je opće rješenje ODJ dano s

$$xe^y + y^2 = C.$$

2. Imamo $P(x,y) = 1 + y^2$ i $Q(x,y) = xy$ pa je

$$\frac{dP}{dy} = 2y, \qquad \frac{dQ}{dx} = y$$

odakle vidimo da jednadžba nije egzaktna. Međutim, primijetimo da je

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1}{xy}(2y - y) = \frac{1}{x},$$

što ovisi samo o x pa zaključujemo da integrirajući faktor možemo tražiti u obliku $\mu(x)$. Sada ODJ glasi

$$\mu(x)(1 + y^2)\,dx + \mu(x)xy\,dy = 0$$

pa su nove funkcije dane s $\widetilde{P}(x,y) = \mu(x)(1 + y^2)$ i $\widetilde{Q}(x,y) = \mu(x)xy$. Imamo

$$\frac{d\widetilde{P}}{dy} = 2\mu(x)y, \qquad \frac{d\widetilde{Q}}{dx} = \mu'(x)xy + \mu(x)y$$

pa vidimo da je ODJ egzaktna ako i samo ako

$$2\mu(x)y = \mu'(x)xy + \mu(x)y \iff \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{x}$$

odakle integiranjem slijedi

$$\ln|\mu(x)| = \ln|x| \implies |\mu(x)| = |x|$$

pa kao integrirajući faktor možemo uzeti $\mu(x) = x$. Sada je $\widetilde{P}(x,y) = x(1+y^2)$ i $\widetilde{Q}(x,y) = x^2y$ te je

$$\frac{d\widetilde{P}}{dy} = 2xy = \frac{d\widetilde{Q}}{dx}$$

pa je ODJ zaista egzaktna. Tražimo funkciju $U(x,y)$ takvu da je

$$\frac{dU}{dx} = x(1+y^2), \qquad \frac{dU}{dy} = x^2y.$$

Integriranjem prve jednadžbe po x dobivamo

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2}(1+y^2) + f(y)$$

za neku funkciju f koja ovisi samo o y. Tada iz druge jednadžbe slijedi

$$x^2y = \frac{dU}{dy} = x^2y + f'(y) \implies f'(y) = 0 \implies f(y) = C$$

pa za funkciju U možemo uzeti

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2}(1+y^2).$$

Sada je opće rješenje ODJ dano s

$$\frac{x^2}{2}(1+y^2) = C.$$

3. Imamo $P(x,y) = y^2 + 3xy^3$ i $Q(x,y) = 1 - xy$ pa je

$$\frac{dP}{dy} = 2y + 9xy^2, \qquad \frac{dQ}{dx} = -y$$

odakle vidimo da jednadžba nije egzaktna. Međutim, primijetimo da je

$$\frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1}{y^2(1+3xy)}(3y + 9xy^2) = \frac{3}{y},$$

što ovisi samo o y pa zaključujemo da integrirajući faktor možemo tražiti u obliku $\mu(y)$. Sada ODJ glasi

$$\mu(y)(y^2 + 3xy^3)\,dx + \mu(y)(1-xy)\,dy = 0$$

pa su nove funkcije dane s $\widetilde{P}(x,y) = \mu(y)(y^2+3xy^3)$ i $\widetilde{Q}(x,y) = \mu(y)(1-xy)$. Imamo

$$\frac{d\widetilde{P}}{dy} = \mu'(y)(y^2+3xy^3) + \mu(y)(2y+9xy^2), \qquad \frac{d\widetilde{Q}}{dx} = -y\mu(y)$$

pa vidimo da je ODJ egzaktna ako i samo ako

$$\mu'(y)(y^2+3xy^3) + \mu(y)(2y+9xy^2) = -y\mu(y) \iff \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{1}{y^2(1+3xy)}(3y+9xy^2) = -\frac{3}{y}$$

odakle integiranjem slijedi

$$\ln|\mu(y)| = -3\ln|y| \implies |\mu(y)| = \frac{1}{|y|^3}$$

pa kao integrirajući faktor možemo uzeti $\mu(y) = \frac{1}{y^3}$. Sada je $\widetilde{P}(x,y) = \frac{1}{y} + 3x$ i $\widetilde{Q}(x,y) = \frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2}$ te je

$$\frac{d\widetilde{P}}{dy} = -\frac{1}{y^2} = \frac{d\widetilde{Q}}{dx}$$

pa je ODJ zaista egzaktna. Tražimo funkciju $U(x,y)$ takvu da je

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{y} + 3x, \qquad \frac{dU}{dy} = \frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2}.$$

Integriranjem prve jednadžbe po x dobivamo

$$U(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2} + f(y)$$

za neku funkciju f koja ovisi samo o y. Tada iz druge jednadžbe slijedi

$$\frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2} = \frac{dU}{dy} = -\frac{x}{y^2} + f'(y) \implies f'(y) = \frac{1}{y^3} \implies f(y) = -\frac{1}{2y^2} + C$$

pa za funkciju U možemo uzeti

$$U(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2y^2}.$$

Sada je opće rješenje ODJ dano s

$$\frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} = C.$$

□

0.2 Homogene linearne ODJ višeg reda s konstantnim koeficijentima

Zadatak 2. Nađite opće rješenje sljedećih homogenih linearnih ODJ s konstantnim koeficijentima:

1. $y'' + 2y' - 3y = 0,$
2. $2y'' + 3y' + y = 0,$
3. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,$
4. $y'' - 2y' + 5y = 0,$

Rješenje.

1. Karakteristična jednadžba glasi $0 = x^2 + 2x - 3$. Njeni korijeni su $r_1 = 1$ i $r_2 = -3$ pa opće rješenje glasi
$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}.$$
2. Karakteristična jednadžba glasi $0 = 2x^2 + 3x + 1$. Njeni korijeni su $r_1 = -1$ i $r_2 = -\frac{1}{2}$ pa opće rješenje glasi
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$
3. Karakteristična jednadžba glasi $0 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Njeni korijeni su $r_{1,2,3} = -1$, što je trostruki realni korijen. Stoga opće rješenje glasi
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$
4. Karakteristična jednadžba glasi $0 = x^2 - 2x + 5$. Njeni korijeni su $r_{1,2} = 1 \pm 2i$ pa imamo jednostruki konjugirano-kompleksni par korijena. Opće rješenje glasi
$$y = C_1 e^{x} \sin(2x) + C_2 e^{x} \cos(2x).$$

□

Zadatak 3. Napišite neku homogenu linearnu ODJ s konstantnim koeficijentima ako je zadano njeno opće rješenje:

1. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x},$
2. $y = e^{2x}(C_1 \sin(4x) + C_2 \cos(4x)) + C_3 e^{-x}$
3. $y = e^{-2x}(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + C_3 x \sin(3x) + C_4 x \cos(3x)),$
4. $y = e^{-2x}(C_1 \operatorname{ch}(3x) + C_2 \operatorname{sh}(3x)),$

Rješenje. 1. Iz općeg rješenja očitavamo korijene karakteristične jednadžbe: $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = -2$. Karakteristična jednadžba stoga glasi

$$0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x(x - 2)(x + 2) = x(x^2 - 4) = x^3 - 4x$$

pa je tražena ODJ $y''' - 4y = 0$.

2. Iz općeg rješenja očitavamo korijene karakteristične jednadžbe: $r_{1,2} = 2 \pm 4i$, $r_3 = -1$. Karakteristična jednadžba stoga glasi

$$0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = (x - 2 - 4i)(x - 2 + 4i)(x + 1) = x^3 - 3x^2 + 16x + 20$$

pa je tražena ODJ $y''' - 3y'' + 16y' + 20 = 0$.

3. Iz općeg rješenja očitavamo korijene karakteristične jednadžbe: $r_{1,2} = -2 + 3i$, $r_{3,4} = -2 - 3i$. Karakteristična jednadžba stoga glasi

$$0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) = (x + 2 - 3i)^2(x + 2 + 3i)^2 = x^4 + 8x^3 + 46x^2 + 72x + 81 = 0$$

pa je tražena ODJ $y^{(4)} + 8y''' + 46y'' + 72y' + 81 = 0$.

4. Zapišimo opće rješenje drugačije:

$$\begin{aligned} y = e^{-2x}(C_1 \operatorname{ch}(3x) + C_2 \operatorname{sh}(3x)) &= e^{-2x}\left(C_1 \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} + C_2 \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) \\ &= C_1 \frac{e^{x} + e^{-5x}}{2} + C_2 \frac{e^{x} - e^{-5x}}{2} = \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right) e^{x} + \left(\frac{C_1 - C_2}{2}\right) e^{-5x}. \end{aligned}$$

Ako uvedemo $D_{1,2} := \frac{C_1 \pm C_2}{2}$ kao nove konstante, opće rješenje zapravo glasi $y = D_1 e^{x} + D_2 e^{-5x}$. pa očitavamo korijene karakteristične jednadžbe: $r_1 = 1$, $r_2 = -5$. Karakteristična jednadžba stoga glasi

$$0 = (x - r_1)(x - r_2) = (x - 1)(x + 5) = x^2 + 4x - 5$$

pa je tražena ODJ $y'' + 4y - 5y = 0$.

$\square$