DIR2, ZADAĆA 3

1. Skicirajte nivo skupove sljedećih funkcija $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ i, gdje to možete, grafove tih funkcija. Sami odaberite odgovarajuće c-ove pazeći pritom na sliku funkcije.

   a) $f(x, y) = y - 3x^2$
   b) $f(x, y) = x - y^2$
   c) $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2$
   d) $f(x, y) = (x - 1)(y - 2)$
   e) $f(x, y) = (x + 1)(y + 3)$
   f) $f(x, y) = y^2 - x^2$
   g) $f(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16}$
   h) $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 3)^2$
   i) $f(x, y) = 5x - y$
   j) $f(x, y) = 2x$
   k) $f(x, y) = 2x - 1$
   l) $f(x, y) = 2x - y - 1$

2. Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda svih funkcija u prvom zadatku. Zatim izračunajte parcijalne derivacije prvog reda sljedećih funkcija:

   a) $f(x, y, z) = xy + z$
   b) $f(x, y) = x^2y^5 + 1$
   c) $f(x, y, z) = \sin xy + \cos z$
   d) $f(x, y, z) = e^{xyz}$
   e) $f(x, y, z) = x^2 \sin yz$
   f) $f(x, y, z) = x \cos(y - 3z) + \arcsin xy$
   g) $f(x, y, z) = \ln(z + \sin(y^2 - x))$

3. Dokažite da za diferencijabilne funkcije $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ vrijedi:

$$\nabla(f \cdot g)(x, y) = g(x, y) \cdot \nabla f(x, y) + f(x, y) \cdot \nabla g(x, y)$$

   Hint: Prvo, koristeći zapis s vježbi koji smo koristili kad smo tek definirali parcijalnu derivaciju i ono što znate o derivaciji produkta funkcije *jedne varijable izvedite formulu za parcijalnu derivaciju produkta funkcija f i g. Zatim koristeći osnovna svojstva zbrajanja vektora i množenja skalarom izvedite traženu formulu.*

Ako vam je teško raditi s funkcijama definiranima na $\mathbf{R}^n$ *, ograničite se na slučaj* $n = 2$ *. Uvjerite se da više dimenzije ne donose kvalitativno ništa novo.*

4. Izračunajte $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ i $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ za sljedeće funkcije f :

   a) xyz

   b) x^2yz

   c) $x^2 + y^2 + z^2$

   d) e^{xyz}

   e) $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$

   f) $\sin(x + y + z) - \cos(xyz)$

5. Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu ako vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

   Dokažite da sljedeće funkcije zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu:

   a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

   b) $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos(5z)$

   Možete li pronaći još neku funkciju koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu? (Ideja: tražite među polinomijalnim funkcijama više varijabli!)

6. Neka je f funkcija td. $\nabla f(1, 1, 1) = (5, 2, 1)$. Neka je $C(t) = (t^2, t^{-3}, t)$. Izračunjate $\frac{d}{dt}(f(C(t)))$ u točki $t = 1$.

7. Izračunajte derivacije:

   a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ u točki $(1, 1)$ duž vektora $(2, 1)$;

   b) $f(x, y, z) = xyx+yz+zx$ u točki $(-1, 1, 7)$ duž vektora $(3, 4, -12)$;

   c) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ u točki $(2, 1)$ u smjeru u kojem f-ja najbrže raste.

8. Izračunajte smjer u kojem f-ja najbrže raste, smjer u kojem najbrže pada i derivacije f-je u tim smjerovima.

a) $f(x,y) = 10 + 6\cos x \cos y + 3\cos 2x + 4\cos 3y\,,\ P = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

b) $f(x,y,z) = \frac{x}{\|(x,y,z)\|}\,,\ P = (1,-1,2)$

c) $f(x,y,z,w) = \|(x,y,z,w)\|\,,\ P = (1,2,-1,1)$

d) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2\,,\ P = (2,-1,2)$

e) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2\,,\ P = (-1,1)$

9. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ u točki $P = (\pi,1,1)$ u smjeru $\overrightarrow{OA}$, gdje je A jedinični vektor $A = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

10. Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu u točki P:

 a) $xy + yz + zx - 1 = 0\,,\ P = (1,1,0)$

 b) $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0\,,\ P = (2,-3,4)$

 c) $2y - z^3 - 3xz = 0\,,\ P = (1,7,3)$

 d) $\sin xy + \sin yz + \sin xz = 1\,,\ P = (1, \pi/2, 0)$

 e) $z - e^x \sin y\,,\ P = (\ln 3, 3\pi/2, -3)$

11. Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije f u točki čije su x i y koordinate zadane:

 a) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ (x,y) = (3,-4)$

 b) $f(x,y) = \sin(xy)\,,\ (x,y) = (1,\pi)$

 c) $f(x,y) = \ln(x+y)\ \ (x,y) = (0,1)$

12. Izaberite dvije phohe u $\mathbb{R}^3$ navedene u ovoj zadaći. Provjerite da li se sijeku i ako da, odaberite jednu točku presjeka. Izračunajte pod kojim kutom se sijeku te dvije phohe u toj točki.

13. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Dokažite da je u svakoj točki c gradijent funkcije $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zadane sa $G(x) = (x, f(x))$ okomit na tangentu na graf funkcije f u točki c.