

Parcijalne diferencijalne jednačbe 1

Prvi ispitni rok - 4. veljače 2026.

1. (8 bodova) Dana je zadaća

$$\begin{cases} xu_x + (1+y)u_y = x+y, \\ u(x, x^2 - \alpha) = x^2 + x \end{cases}$$

- (a) U ovisnosti u $\alpha \in \mathbb{R}$ odredite sve karakteristične točke danog vektorskog polja a na početnoj krivlji.
(b) Riješite zadaću na desnoj poluravnini za one α za koje karakterističnih točaka nema.

Rješenje:

- (a) Kako je $a(x, y, z) = (x, 1+y)^T$ te $\gamma(s) = (s, s^2 - \alpha)$, imamo za $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} a_1(\gamma(s), u_0(s)) & \gamma'_1(s) \\ a_2(\gamma(s), u_0(s)) & \gamma'_2(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & 1 \\ s^2 - \alpha + 1 & 2s \end{vmatrix} = s^2 + \alpha - 1.$$

Stoga vidimo da za $\alpha > 1$ karakterističnih točaka nema, za $\alpha = 1$ imamo jednu karakterističnu točku $s = 0$ (odnosno $(0, 0)$), te za $\alpha < 1$ imamo dvije karakteristične točke koje odgovaraju $s = \pm\sqrt{1-\alpha}$.

- (b) Rješavamo zadaću za $\alpha > 1$. Karakteristični sustav je dan s

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 1+y \\ z' = x+y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0, s) = s \\ y(0, s) = s^2 - \alpha \\ z(0, s) = s^2 + s. \end{cases}$$

Iz prve dvije jednačbe i početnih uvjeta slijedi odmah

$$x(t, s) = se^t, \quad y(t, s) = (s^2 - \alpha + 1)e^t - 1.$$

Kako je pretpostavka $x > 0$, iz prve jednakosti možemo pisati $e^t = \frac{x}{s}$, što uvrštavanjem u drugu daje kvadratnu jednačbu po s čija su rješenja

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{y+1}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y+1}{x} \right)^2 + 4(\alpha-1)} \right).$$

Kako su x i s istog predznaka (zbog $x = se^t$), uzimamo rješenje s predznakom $+$. Nadalje je

$$t = \ln \frac{x}{s} = \ln x - \ln s = \ln x - \ln \frac{1}{2} \left(\frac{y+1}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y+1}{x} \right)^2 + 4(\alpha-1)} \right).$$

Konačno, imamo $z' = x + y = x' + y' - 1 = (x + y - t)'$, pa integriranjem od 0 do t dobijemo

$$z(t, s) - s^2 - s = x(t, s) + y(t, s) - t - s - s^2 + \alpha,$$

odnosno

$$z(t, s) = x(t, s) + y(t, s) - t + \alpha.$$

Sada je konačno rješenje dano s

$$u(x, y) = z(t, s) = x + y - \ln x + \ln \frac{1}{2} \left(\frac{y+1}{x} + \sqrt{\left(\frac{y+1}{x} \right)^2 + 4(\alpha - 1)} \right) + \alpha.$$

2. (a) (4 boda) Neka je $A \in M_d$ pozitivno definitna matrica, te neka $u \in C^2(\overline{K(0,1)})$ zadovoljava

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = 0 \quad \text{na } K(0,1).$$

Pokažite da vrijedi

$$\max_{\overline{K(0,1)}} u = \max_{S(0,1)} u.$$

- (b) (4 boda) Zapišite eksplicitno formulu za Greenovu funkciju za područje $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0\}$

Rješenje:

- (a) Neka je u navedeno rješenje jednadžbe. Kao na vježbama rastavimo matricu A u obliku $A = MM^T$ te uvedemo funkciju $v(x) = u(Mx)$. Tada je $\Delta v = MM^T : \nabla^2 u = A : \nabla^2 u = 0$, pa slijedi da v zadovoljava princip maksimuma. Kako je M regularna linearna transformacija, ona slika rub u rub, pa slijedi tvrdnja.
- (b) Za $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ označimo redom s

$$x' = (x_2, x_1), \quad x'' = (-x_2, -x_1), \quad x''' = (-x_1, -x_2)$$

simetrične točke s obzirom na pravac $x_1 = x_2$, $x_1 = -x_2$ te suprotnu točku. Tada je

$$G_\Omega(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - x') - \Phi(y - x'') + \Phi(y - x''').$$

3. (5 bodova) Riješite početno-rubnu zadaću na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \sin x + x, \\ u(0, t) = 0. \end{cases}$$

Rješenje: Kako je početni uvjet $g(x) = \sin x + x$ već neparna funkcija, proširenjem po neparnosti dobijemo zadaću na $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \sin x + x. \end{cases}$$

Kako je $\Delta(\sin x) = -\sin x$ te $\Delta(x) = 0$, možemo rastaviti ovu zadaću na dvije te za svaku iskoristiti na vježbama izvedeni oblik rješenja u obliku $e^{\lambda t} g(x)$. Time dobivamo konačno rješenje koje je

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x + x.$$

4. (a) (4 boda) Riješite početnu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = x_1 e^t, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = x_1^2 - x_2^2, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = x_1 x_3, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

(b) (5 bodova) Neka je u rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = g, \quad u_t(\cdot, 0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ te $g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ takve da je $\text{supp } g, \text{supp } h \subseteq K(0, R)$. Izvedite formulu za rješenje te zadaće te pokažite (bez pozivanja na isti rezultat s predavanja) da je $u(x, t) = 0$ za sve $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ takve da je $|x| > R + ct$.

Rješenje:

(a) Kako su funkcije $f_1(x) = x_1$, $g(x) = x_1^2 - x_2^2$ i $h(x) = x_1 x_3$ harmoničke funkcije te $f_2(t) = e^t$ glatka, možemo koristiti formulu s vježbi za odgovarajuću valnu zadaću te dobijemo

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 - x_2^2 + t x_1 x_3 + x_1(e^t - t - 1).$$

(b) Neka je u rješenje dane zadaće te neka je $v(x, t) = u(x, t/c)$. Tada je v rješenje zadaće

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \\ v(x, 0) = g(x) \\ v_t(x, 0) = \frac{1}{c} h(x), \end{cases}$$

pa korištenjem Kirchhoffove formule i povratne supstitucije slijedi

$$u(x, t) = v(x, ct) = \frac{1}{|S(x, ct)|} \int_{S(x, ct)} g(y) + t h(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) d\sigma(y).$$

Nadalje, kako za $|x| > R + ct$ vrijedi $K(0, R) \cap S(x, ct) = \emptyset$, iz gornje formule odmah slijedi da je tada $u(x, t) = 0$.