Zadaci 1

ODJ

Zadatak 1. Pripadnom supstitucijom svedite ODJ na separabilne pa ih riješite:

1. $y' = (4x - y + 1)^2, \qquad y(0) = 2,$
2. $y' = e^{9y-x}, \qquad y(0) = 0.$

Rješenje. 1. Koristimo supstituciju

$$z = 4x - y + 1 \implies z' = 4 - y'$$

odakle slijedi $y' = 4 - z'$ pa ODJ u za funkciju z glasi $4 - z' = z^2$. Ovo je separabilna jednadžba koju možemo riješiti

$$\frac{dz}{4 - z^2} = dx \implies \int -\frac{dz}{(z-2)(z+2)} = \int dx.$$

Integral možemo riješiti rastavom na parcijalne razlomke:

$$\int -\frac{dz}{(z-2)(z+2)} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-2}\right) dz = \frac{1}{4}\left(\ln(z+2) - \ln(z-2)\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| + C$$

pa imamo

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| = x + C \implies \left|\frac{z+2}{z-2}\right| = e^c e^{4x} \implies \frac{z+2}{z-2} = De^{4x}$$

za neku konstantu $D \in \mathbb{R}$. Stoga opće rješenje glasi

$$\frac{4x - y + 3}{4x - y - 1} = De^{4x}$$

pa uvrštavanje početnog uvjeta daje

$$-\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 0 - 2 + 3}{4 \cdot 0 - 2 - 1} = De^{4 \cdot 0} = D.$$

Zaključujemo da je traženo partikularno rješenje dano s

$$\frac{4x - y + 3}{4x - y - 1} = \frac{1}{3}e^{4x}.$$

Odavde možemo i eksplicitno izraziti y:

$$3(4x - y + 3) = (4x - y - 1)e^{4x} \implies y(e^{4x} - 3) = e^{4x}(4x - 1) - 12x - 9 \implies y = \frac{e^{4x}(4x-1) - 12x - 9}{e^{4x} - 3}.$$

2. Koristimo supstituciju

$$z = 9y - x \implies z' = 9y' - 1 \implies y' = \frac{z' + 1}{9}$$

pa ODJ za funkciju z glasi

$$\frac{z' + 1}{9} = e^z \implies z' + 1 = 9e^z \implies \frac{dz}{9e^z - 1} = dx.$$

Integral možemo riješiti tako da brojnik i nazivnik pomnožimo s e^{-z}:

$$\int \frac{dz}{9e^z - 1} = \int \frac{e^{-z}dz}{9 - e^{-z}} = \begin{bmatrix} t = e^{-z} \\ dt = -e^{-z}\,dz \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t - 9} = \ln|t - 9| + C = \ln\left|e^{-z} - 9\right| + C$$

pa imamo

$$\ln\left|e^{-z} - 9\right| = x + C \implies e^{-z} - 9 = De^x$$

odakle očitavamo opće rješenje $e^{9y-x} = 9 + De^x$. Uvrštavanjem početnog uvjeta dobivamo

$$1 = e^{9 \cdot 0 - 0} = 9 + De^0 = 9 + D \implies D = -8$$

pa je $e^{9y-x} = 9 - 8e^x$ traženo partikularno rješenje.

□

Zadatak 2. Riješite homogene ODJ koristeći supstituciju $z = \frac{y}{x}$.

1. $y' = \frac{x+y}{x}$,
2. $\left(y' - \dfrac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 0$, uz početni uvjet $y(1) = 1$,
3. $(3x - 7y)dx = (3y - 7x)dy$,
4. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$,
5. $x^2 y' + xy + 2y^2 = 0$.

Rješenje. U svim podzadacima ćemo imati

$$y = zx \implies y' = z + z'x.$$

1. Jednadžbu možemo zapisati u varijabli z kao $y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} \iff z + z'x = 1 + z \iff z'x = 1$. Dobili smo ODJ koju možemo riješiti separacijom varijabli:

$$\frac{dz}{dx} x = 1 \implies dz = \frac{dx}{x} \implies \int dz = \int \frac{dx}{x} \implies z = \ln|x| + C.$$

Sada možemo vratiti supstituciju $z = \frac{y}{x}$ i zaključiti da je

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \implies y = x \ln|x| + Cx$$

opće rješenje.

2. Imamo

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0 \iff (z + z'x - z) \operatorname{arctg} z = 0 \iff z'x \operatorname{arctg} z = 0.$$

Posljednju jednadžbu možemo podijeliti s x jer $x = 0$ nema smisla uvrštavati u originalnu ODJ. Stoga je nova ODJ ekvivalentna

$$z' \operatorname{arctg} z = 0 \implies \frac{dz}{dx} \operatorname{arctg} z \implies (\operatorname{arctg} z)\, dz = 0\, dx \implies \int (\operatorname{arctg} z)\, dz = \int 0\, dx \implies \frac{1}{1+z^2} = C.$$

Početni uvjet glasi $y(1) = 1$ odnosno $z(1) = 1$ odakle zaključujemo da mora biti $C = \frac{1}{2}$. Konačno, imamo

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2} \iff 1 + z^2 = 2 \iff 1 + \frac{y^2}{x^2} = 2 \iff y^2 = x^2$$

što je traženo partikularno rješenje.

3. Jednadžbu možemo zapisati kao

$$3x - 7y = (3y - 7x)y' \iff 3x - 7zx = (3zx - 7x)(z + z'x) \iff \frac{3x - 7zx}{3zx - 7x} - z = z'x$$

odnosno

$$z'x = \frac{3 - 7z}{3z - 7} - z = \frac{3(1 - z^2)}{3z - 7} \implies \frac{3z - 7}{3(1 - z^2)} dz = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{3z - 7}{3(1 - z^2)} dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Funkciju na lijevoj strani možemo integrirati rastavom na parcijalne razlomke

$$\int \frac{3z - 7}{3(1 - z^2)} dz = \frac{1}{3} \int \frac{3z - 7}{(1 - z)(1 + z)} dz = \frac{1}{3} \int \left(\frac{2}{z - 1} - \frac{5}{z + 1}\right) dz = \frac{1}{3}(\ln|z - 1| - \ln|z + 1|) = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right|.$$

Dakle, imamo

$$\frac{1}{3} \ln\left|\frac{(z - 1)^2}{(z + 1)^5}\right| = \ln|x| + C \implies \frac{1}{3} \ln\left|\frac{\left(\frac{y}{x} - 1\right)^2}{\left(\frac{y}{x} + 1\right)^5}\right| = \ln|x| + C$$

odnosno

$$\left|\frac{\left(\frac{y}{x}-1\right)^2}{\left(\frac{y}{x}+1\right)^5}\right|^{\frac{1}{3}} = e^C|x|,$$

što možemo zapisati kao

$$\left(\frac{y}{x}+1\right)^{\frac{5}{3}} = D\frac{\left(\frac{y}{x}-1\right)^{\frac{2}{3}}}{x}, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Množenjem obje strane jednakosti s $x^{\frac{5}{3}}$ možemo ovo zapisati i kao

$$(y+x)^{\frac{5}{3}} = D\,(y-x)^{\frac{2}{3}} \iff (y+x)^5 = D^3\,(y-x)^2$$

odnosno

$$(y+x)^5 = E\,(y-x)^2\,, \qquad E \in \mathbb{R}.$$

4. Imamo

$$y' = \frac{xy}{x^2-y^2} \iff z+z'x = \frac{zx^2}{x^2+z^2x^2} = \frac{z}{1+z^2} \iff z'x = \frac{-z^3}{1+z^2}$$

što možemo riješiti separacijom:

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{-z^3}{1+z^2} \implies \frac{-(1+z^2)}{z^3}\,dz = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{-(1+z^2)}{z^3}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

odakle slijedi

$$-\frac{1}{2z^2} - \ln|z| = \ln|x| + C \implies -\frac{1}{2z^2} = \ln|xz| + C \implies -\frac{x^2}{2y^2} = \ln|y| + C \implies e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = e^C|y|.$$

Zaključujemo da je opće rješenje oblika

$$y = De^{-\frac{x^2}{2y^2}}, \qquad \text{za neki } D \in \mathbb{R}.$$

5. Dijeljenjem s x^2 imamo

$$x^2y' + xy + 2y^2 = 0 \iff y' + \frac{y}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \iff z + z'x + z + 2z^2 = 0$$

što možemo separirati kao

$$\frac{dz}{z^2+z} = -\frac{2\,dx}{x} \implies \int \frac{dz}{z^2+z} = --\int \frac{2\,dx}{x}.$$

Integral na lijevoj strani možemo riješiti rastavom na parcijalne razlomke:

$$\int \frac{dz}{z^2+z} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\,dz = \ln|z| - \ln|z+1| = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right|.$$

Zaključujemo

$$\ln\left|\frac{z}{z+1}\right| = -2\ln|x| + C = \ln(x^2) + C$$

pa eksponenciranjem slijedi

$$\frac{y}{y+x} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} = \frac{z}{z+1} = Ce^{x^2}.$$

□

Zadatak 3. Riješite linearne ODJ prvog reda:

1. $y' + \frac{y}{1+x^2} = 0,$
2. $y' - 2y = 6,$

3. $y' + xy = 5x$,
4. $y' + e^x y = -2e^x$,
5. $y' - y = x^2$,
6. $2y' + y = x$.

Rješenje. Sve zadatke ćemo riješiti Lagrangeovom metodom (metodom varijacije konstanti).

1. Riječ je o homogenoj linearnoj ODJ koju možemo direktno riješiti separacijom varijabli.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x^2} = 0 \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2} \implies \ln|y| = -\operatorname{arctg}(x) + C \implies y = De^{-\operatorname{arctg}(x)}.$$

2. Prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ:

$$y' - 2y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = 2y \implies \frac{dy}{y} = 2\,dx \implies \ln|y| = 2x + C \implies y = De^{2x}.$$

   Opće rješenje tražimo u obliku $y = D(x)e^{2x}$. Imamo

$$6 = y' - 2y = D'(x)e^{2x} + 2D(x)e^{2x} - 2D(x)e^{2x} = D'(x)e^{2x}$$

   odakle slijedi

$$D'(x) = 6e^{-2x} \implies D(x) = \int 6e^{-2x}\,dx = -3e^{-2x} + C$$

   pa je opće rješenje dano s

$$y = D(x)e^{2x} = (-3e^{-2x} + C)e^{2x} = Ce^{2x} - 3.$$

3. Prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ:

$$y' + xy = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -xy \implies \frac{dy}{y} = -x\,dx \implies \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C \implies y = De^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   Opće rješenje tražimo u obliku $y = D(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Imamo

$$5x = y' + xy = D'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + D(x)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) + xD(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = D'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   odakle slijedi

$$D'(x) = 5xe^{\frac{x^2}{2}} \implies D(x) = \int 5xe^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[t = \tfrac{x^2}{2},\quad dt = x\,dx\right] = \int 5e^t\,dx = 5e^t + C = 5e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

   pa je opće rješenje dano s

$$y = D(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (-5e^{-\frac{x^2}{2}} + C)e^{-\frac{x^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 5.$$

4. Prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ:

$$y' + e^x y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -e^x y \implies \frac{dy}{y} = -e^x\,dx \implies \ln|y| = -e^x + C \implies y = De^{-e^x}.$$

   Opće rješenje tražimo u obliku $y = D(x)e^{-e^x}$. Imamo

$$-2e^x = D'(x)e^{-e^x} + D(x)e^{-e^x}(-e^x) + e^x D(x)e^{-e^x} = D'(x)e^{e^{-x}} \implies D'(x) = -2e^x e^{e^x}$$

   pa je

$$D(x) = -2\int e^x e^{e^x}\,dt = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{bmatrix} = -2\int t\,dt = -2e^t + C = -2e^{e^x} + C.$$

   Zaključujemo da je opće rješenje dano s

$$y = (-2e^{e^x} + C)e^{-e^x} = Ce^{-e^x} - 2.$$

5. Prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ $y' = y$ čije rješenje već znamo s vježbi: $y = De^x$. Opće rješenje tražimo u obliku $y = D(x)e^x$. Imamo

$$x^2 = D'(x)e^x + D(x)e^x - D(x)e^x = D'(x)e^x \implies D'(x) = x^2e^{-x}$$

pa je

$$\begin{aligned} D(x) &= \int x^2e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2, & du = 2x\,dx, \\ dv = e^{-x}\,dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} \\ &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-x}\,dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + C. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje je oblika

$$y = D(x)e^x = -x^2 - 2x - 2 + Ce^x.$$

6. Prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ $2y' = -y$. Osim separacijom, možemo ju riješiti i supstitucijom $z(x) = y(-2x)$. Tada vrijedi $z'(x) = -2y'(-2x)$ pa imamo

$$2y'(x) = -y(x), \forall x \in \mathbb{R} \implies -2y'(-2x) = y(-2x), \forall x \in \mathbb{R} \implies z' = z.$$

Znamo da je opće rješenje $z(x) = De^x$ pa je

$$y(-2x) = z(x) = De^x \implies y(x) = z\left(-\frac{x}{2}\right) = De^{-\frac{x}{2}}.$$

Sada opće rješenje originalne ODJ tražimo u obliku $y = D(x)e^{-\frac{x}{2}}$. Imamo

$$x = 2D'(x)e^{-\frac{x}{2}} - D(x)e^{-\frac{x}{2}} + D(x)e^{-\frac{x}{2}} = 2D'(x)e^{-\frac{x}{2}} \implies D'(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$$

pa je

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{2}\int xe^{\frac{x}{2}}\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{\frac{x}{2}}\,dx, & v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{bmatrix} \\ &= xe^{\frac{x}{2}} - \int e^{\frac{x}{2}}\,dx = e^{\frac{x}{2}}(x-2) + C \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje je oblika

$$y = D(x)e^{-\frac{x}{2}} = x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}}.$$

$\square$

Zadaci 2

ODJ

Zadatak 1. Riješite Bernoullijeve ODJ:

1. $x^2y' = y^2 + xy$,
2. $y' + x^5y = x^5y^7$,
3. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -y^2\cos x$,
4. $y' = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}$,
5. $y' + \frac{y}{x} = x^2y^{\frac{3}{2}}$.

Rješenje. Zadatke ćemo rješavati na dva načina: supstitucijom $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ i Lagrangeovom metodom.

1. Dijeljenjem obje strane s x^2, jednadžba poprima standardni oblik

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$$

odakle vidimo da je zaista Bernoullijeva s $n = 2$.

I. Uvedimo supstituciju $z = \frac{1}{y}$. Tada je $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Dijeljenjem jednadžbe s y^2, ona se svodi na

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -\frac{1}{x^2} \implies z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}.$$

Ovo je linearna ODJ koju ćemo riješiti Lagrangeovom metodom. Prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ

$$z' + \frac{1}{x}z = 0$$

čije se opće rješenje lako nalazi separacijom varijabli: $z = \frac{C}{x}$. Opće rješenje čitave linearne ODJ tražimo metodom varijacije konstante u obliku $z = \frac{C(x)}{x}$. Dobivamo

$$-\frac{1}{x^2} = z' + \frac{1}{x}z = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} \implies C'(x) = -\frac{1}{x}$$

odakle integracijom slijedi

$$C(x) = -\ln|x| + D \implies z = \frac{C(x)}{x} = \frac{-\ln|x| + D}{x}.$$

Vraćanjem na varijablu y dobivamo opće rješenje originalne ODJ:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{x}{D - \ln|x|}.$$

II. Prema Lagrangeovoj metodi, prvo rješavamo homogenu linearnu jednadžbu

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

čije opće rješenje lako nalazimo separacijom: $y = Cx$. Opće rješenje čitave Bernoullijeve ODJ sada tražimo metodom varijacije konstante u obliku $y = C(x)x$. Dobivamo

$$C'(x)x = C'(x)x + C(x) - C(x) = y' - \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x^2} = \frac{C(x)^2x^2}{x^2} = C(x)^2 \implies \frac{C'(x)}{C(x)^2} = \frac{1}{x}.$$

Ovo je separabilna ODJ za funkciju $C(x)$, integriranjem slijedi

$$-\frac{1}{C(x)} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + D \implies C(x) = -\frac{1}{\ln|x| + D}.$$

Sada opće rješenje polazne Bernoullijeve ODJ glasi:

$$y = C(x)x = \frac{-x}{\ln|x| + D} = \frac{x}{-\ln|x| - D}.$$

(primijetite da je ovo isto rješenje kao ranije jer konstantu D možemo zamijeniti s $-D$).

III. Najlakše dolazimo do rješenja ako primijetimo da je ustvari riječ o homogenoj jednadžbi

$$y' - \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

koju standardno rješavamo supsitucijom $z = \frac{y}{x}$. Imamo $y' = z'x + z$ pa dolazimo do ODJ

$$z'x = z'x + z - z = z^2 \implies \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x} \implies -\frac{1}{z} = \ln|x| + D \implies z = -\frac{1}{\ln|x| + D}.$$

Sada je

$$y = zx = -\frac{x}{\ln|x| + D}.$$

2. Jednadžba jest Bernoullijeva s $n = 7$.

I. Uvedimo supstituciju $z = \frac{1}{y^6}$. Tada je $z' = -\frac{6y'}{y^7}$. Množenjem jednadžbe s $-\frac{6}{y^7}$ ona se svodi na

$$-\frac{6y'}{y^7} - x^5\frac{6}{y^6} = -6x^5 \implies z' - 6x^5 z = -6x^5.$$

Ovo je linearna ODJ koju u ovom specifičnom slučaju možemo riješiti separacijom. Imamo

$$z' = 6x^5(z-1) \implies \frac{dz}{z-1} = 6x^5\,dx \implies \ln|z-1| = x^6 + C \implies z - 1 = De^{x^6} \implies z = 1 + De^{x^6}.$$

Sada je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y = \frac{1}{z^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{(1 + De^{x^6})^{\frac{1}{6}}}.$$

II. Prema Lagrangeovoj metodi, prvo rješavamo homogenu linearnu jednadžbu

$$y' + x^5 y = 0$$

čije opće rješenje lako nalazimo separacijom: $y = De^{-\frac{x^6}{6}}$. Opće rješenje čitave Bernoullijeve ODJ sada tražimo metodom varijacije konstante u obliku $y = D(x)e^{-\frac{x^6}{6}}$. Dobivamo

$$D'(x)e^{-\frac{x^6}{6}} = D'(x)e^{-\frac{x^6}{6}} + D(x)\left(-x^5 e^{-\frac{x^6}{6}}\right) + x^5 D(x)e^{-\frac{x^6}{6}} = y' + x^5 y = x^5 y^7 = x^5 D(x)^7 e^{-\frac{7x^6}{6}}$$

odnosno

$$\frac{D'(x)}{D(x)^7} = x^5 e^{-x^6}.$$

Integriranjem slijedi

$$-\frac{1}{6D(x)^6} = \int x^5 e^{-x^6}\,dx = \begin{bmatrix} t = -x^6, \\ dt = -6x^5\,dx \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\int e^t\,dt = -\frac{1}{6}e^t + E = -\frac{1}{6}e^{-x^6} + E$$

pa zaključujemo

$$D(x) = \frac{1}{(e^{-x^6} - 6E)^{\frac{1}{6}}}.$$

Sada je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y = D(x)e^{-\frac{x^6}{6}} = \left(\frac{e^{-x^6}}{e^{-x^6} - 6E}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{(1 - 6Ee^{x^6})^{\frac{1}{6}}}.$$

3. Jednadžba jest Bernoullijeva s $n = 2$.

   I. Uvedimo supstituciju $z = \frac{1}{y}$. Tada je $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Dijeljenjem jednadžbe s $-y^2$ ona se svodi na

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{\operatorname{tg} x}{y} = \cos x \implies z' + z \operatorname{tg} x = \cos x.$$

   Ovo je linearna ODJ koju ćemo riješiti metodom integrirajućeg faktora. Imamo

$$\mu(x) = e^{\int \operatorname{tg} x\, dx} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx} = \begin{bmatrix} t = \cos x, \\ dt = -\sin x\, dx \end{bmatrix} = e^{\int -\frac{dt}{t}} = e^{-\ln|t|} = \frac{1}{|t|} = \frac{1}{|\cos x|}.$$

   Možemo maknuti apsolutnu vijednost pa množenjem obje strane jednadžbe s $\frac{1}{\cos x}$ dobivamo

$$\left(\frac{z}{\cos x}\right)' = \frac{z'}{\cos x} + z\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{z'}{\cos x} + z \operatorname{tg} x \cos x = 1 \implies \frac{z}{\cos x} = \int 1\, dx = x + C \implies z = (x+C)\cos x.$$

   Sada je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{(x+C)\cos x}.$$

   II. Prema Lagrangeovoj metodi, prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ

$$y' - y \operatorname{tg} x = 0 \implies \frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x\, dx \implies \ln|y| = \int \operatorname{tg} x\, dx = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C \implies |y| = \frac{e^C}{|\cos x|}$$

   pa uklanjanjem apsolutne vrijednosti dobivamo

$$y = \frac{D}{\cos x}.$$

   Opće rješenje Bernoullijeve ODJ tražimo metodom varijacije konstante u obliku

$$y = \frac{D(x)}{\cos x}.$$

   Dobivamo

$$\frac{D'(x)}{\cos x} = \frac{D'(x)\cos x + D(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{D(x)}{\cos x}\operatorname{tg} x = -\frac{D(x)^2}{\cos^2 x}\cdot\cos x = -\frac{D(x)^2}{\cos x} \implies \frac{D'(x)}{D^2(x)} = -1.$$

   Integriranjem obje strane slijedi

$$-\frac{1}{D(x)} = -x + C \implies D(x) = \frac{1}{x - C}$$

   pa je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y = \frac{D(x)}{\cos x} = \frac{1}{(x - C)\cos x}.$$

4. Jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način:

$$y' - \frac{1}{2(x+1)}y = -\frac{x}{2(x+1)}\cdot\frac{1}{y}$$

   Odavde vidimo za jednadžba jest Bernoullijeva s $n = -1$.

   I. Uvedimo supstituciju $z = \frac{1}{y^{(-1)-1}} = y^2$. Tada je $z' = 2yy'$. Množenjem jednadžbe s $2y$ ona se svodi na

$$2yy' - \frac{1}{x+1}y^2 = -\frac{x}{x+1} \implies z' - \frac{1}{x+1}z = -\frac{x}{x+1}.$$

Ovo je linearna ODJ koju ćemo riješiti metodom integrirajućeg faktora. Imamo

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-dx}{x+1}} = e^{-\ln|x+1|} = \frac{1}{|x+1|}.$$

Možemo maknuti apsolutnu vijednost pa množenjem obje strane jednadžbe s $\frac{1}{x+1}$ dobivamo

$$\frac{1}{x+1}z' - \frac{1}{(x+1)^2}z = -\frac{x}{(x+1)^2} \implies \left(\frac{z}{x+1}\right)' = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

pa integriranjem slijedi

$$\frac{z}{x+1} = \int -\frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(-\frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$$

odnosno

$$z = (x+1)\left(-\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C\right).$$

Sada je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y^2 = z = (x+1)\left(-\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C\right).$$

II. Prema Lagrangeovoj metodi, prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ

$$y' - \frac{1}{2(x+1)}y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2(x+1)} \implies \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x+1| \implies y = D\sqrt{|x+1|}.$$

Opće rješenje Bernoullijeve ODJ tražimo metodom varijacije konstante u obliku

$$y = D(x)\sqrt{|x+1|}.$$

Dobivamo

$$D'(x)\sqrt{|x+1|} = -\frac{x}{2(x+1)} \cdot \frac{1}{D(x)\sqrt{|x+1|}}$$

odnosno

$$(D(x)^2)' = 2D(x)D'(x) = -\frac{x}{(x+1)|x+1|} = -\frac{x}{(x+1)^2}\operatorname{sgn}(x+1)$$

Integriranjem obje strane na desnoj strani dobivamo integral kojeg smo već rješavali u prošloj metodi:

$$D(x)^2 = \operatorname{sgn}(x+1)\int \left(-\frac{x}{(x+1)^2}\right) dx = \operatorname{sgn}(x+1)\left(-\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C\right).$$

pa je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y^2 = D(x)^2|x+1| = (x+1)\left(-\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C\right).$$

5. Jednadžba jest Bernoullijeva uz $n = \frac{3}{2}$.

   (a) Uvedimo supstituciju $z = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Tada je $z' = -\frac{y'}{2y^{\frac{3}{2}}}$. Dijeljenjem jednadžbe s $-2y^{\frac{3}{2}}$ dobivamo

$$-\frac{y'}{2y^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2x\sqrt{y}} = -\frac{1}{2}x^2 \implies z' - \frac{z}{2x} = -\frac{1}{2}x^2.$$

Ovo je linearna ODJ koju ćemo riješiti metodom integrirajućeg faktora. Imamo

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{dx}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}\ln|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

pa množenjem obje strane jednadžbe s $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} z' - \frac{z}{2|x|^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sgn}(x) = -\frac{1}{2}|x|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(x) \implies \left(\frac{z}{\sqrt{|x|}}\right)' = -\frac{1}{2}|x|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(x)$$

pa integriranjem slijedi

$$\frac{z}{\sqrt{|x|}} = -\frac{1}{2} \int |x|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(x)\, dx = -\frac{1}{2} \frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \operatorname{sgn}(x) + C = -\frac{1}{5}|x|^{\frac{5}{2}} \operatorname{sgn}(x) + C \implies z = -\frac{1}{5}x^3 + C\sqrt{|x|}.$$

Zaključujemo da je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}x^3 + C\sqrt{|x|}\right)^2}.$$

(b) Prema Lagrangeovoj metodi, prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ $y' + \frac{y}{x} = 0$. Separacijom lako dobivamo njeno rješenje $y = \frac{D}{x}$ pa opće rješenje Bernoullijeve ODJ tražimo metodom varijacije konstante u obliku $y = \frac{D(x)}{x}$. Budući da je zbog pojave $y^{\frac{3}{2}}$ u originalnoj ODJ nužno $y \geq 0$, možemo pisati $y = \frac{D(x)}{|x|}$ za neku funkciju $D(x) \geq 0$. Imamo

$$\frac{D'(x)}{x} = x^2 \cdot \frac{D(x)^{\frac{3}{2}}}{|x|^{\frac{3}{2}}} \implies \frac{D(x)}{D(x)^{\frac{3}{2}}} = |x|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(x)$$

pa integriranjem slijedi

$$-\frac{1}{2\sqrt{D(x)}} = |x|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(x) + C \implies D(x) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}|x|^{\frac{5}{2}} \operatorname{sgn}(x) - 2C\right)^2}.$$

Zaključujemo da je opće rješenje Bernoullijeve ODJ dano s

$$y = \frac{D(x)}{|x|} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}|x|^{\frac{5}{2}} \operatorname{sgn}(x) - 2C\right)^2 |x|} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}x^3 - 2C\sqrt{|x|}\right)^2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}x^3 + D\sqrt{|x|}\right)^2}$$

gdje smo stavili $D = -2C$.

$\square$

Zadaci 3

ODJ

Opći oblik Riccatijeve ODJ:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Supstitucijom $y = y_1 + z$, gdje je y_1 poznato partikularno rješenje te jednadžbe, ODJ se svodi na Bernoullijevu ODJ za funkciju z. Partikularno rješenje treba pogoditi ili će biti zadano u zadatku.

Zadatak 1. Riješite Riccatijeve ODJ:

1. $xy' - xy^2 - (2x^2+1)y - x^3 = 0$,
2. $y' + \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^3} = 2x$,
3. $e^{-x}y' + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$,
4. $y' + (\sin x + 2\sin^2 x)y - (\sin x)y^2 = \sin^3 x + \cos x + \sin^2 x$,
5. $xy' - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x$.

Rješenje. 1. Dijeljenjem jednadžbe s x dolazimo do

$$y' = y^2 + \frac{2x^2+1}{x}y + x^2,$$

što je standardno oblik Riccatijeve ODJ. Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_1 = ax$ za $a \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem slijedi

$$a = a^2x^2 + (2x^2+1)a + x^2 = (a+1)^2x + a \implies x(a+1)^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

pa zaključujemo $a = -1$, odnosno $y_1 = -x$. Uvodimo supstituciju $y = -x + z$, odnosno $y = z - x$. Dobivamo $y' = z' - 1$ pa uvrštavanjem dolazimo do Bernoullijeve ODJ

$$z' - \frac{z}{x} = z^2$$

koju rješavamo Lagrangeovom metodom. Prvo tražimo rješenje homogene linearne ODJ $z' - \frac{z}{x} = 0$, do kojeg lako dolazimo separacijom $z = Cx$. Opće rješenje Bernoullijeve ODJ tražimo u obliku $z = C(x)x$. Uvrštavanjem slijedi

$$C'(x)x = C(x)^2x^2 \implies \frac{C'}{C^2} = x.$$

Integriranjem zaključujemo

$$-\frac{1}{C} = \frac{x^2}{2} + D \implies C(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + D}$$

odnosno

$$z = \frac{-x}{\frac{x^2}{2} + D}.$$

Napokon, rješenje Riccatijeve ODJ je

$$y = -x + z = -x\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{2} + D}\right).$$

2. Partikularno rješenje tražimo u obliku $y = ax^2$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem slijedi

$$2ax + ax - a^2x = 2x \implies -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a \in \{1, 2\}.$$

Potrebno nam je samo jedno rješenje pa odaberimo $y_1 = x^2$. Uvedimo supstituciju $y = x^2 + z$. Uvrštavanjem slijedi

$$2x + z' + \frac{x^2+z}{x} - \frac{(x^2+z)^2}{x^3} = 2x \implies z' - \frac{z}{x} = \frac{z^2}{x^3}.$$

Došli smo do Bernoullijeve ODJ za funkciju z koju rješavamo Lagrangeovom metodom. Prvo rješavamo homogenu linearnu ODJ $z' - \frac{z}{x} = 0$ do čijeg općeg rješenja lagano dolazimo separacijom: $z = Cx$. Opće rješenje Bernoullijeve ODJ tražimo metodom varijacije konstante u obliku $z = C(x)x$. Uvrštavanjem slijedi

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = \frac{C(x)^2 x^2}{x^3} \implies \frac{C'(x)}{C(x)^2} = \frac{1}{x^2} \implies -\frac{1}{C(x)} = -\frac{1}{x} + C = \frac{Cx - 1}{x}$$

odnosno

$$C(x) = \frac{x}{1 - Cx} \implies z = C(x)x = \frac{x^2}{1 - Cx}.$$

Sada zaključujemo da je opće rješenje Riccatijeve ODJ dano s

$$y = x^2 + z = x^2 + \frac{x^2}{1 - Cx} = x^2 \cdot \frac{2 - Cx}{1 - Cx}.$$

3. Množenjem obje strane s e^x dolazimo do jednadžbe

$$y' - 2e^{2x}y + e^x y^2 = e^x - e^{3x}$$

što zaista jest Riccatijeva ODJ. Primijetimo da je $y_1 = e^x$ njeno partikularno rješenje. Uvedimo supstituciju $y = e^x + z$. Tada je

$$e^x + z' - 2e^{2x}(e^x + z) + e^x(e^x + z)^2 = e^x - e^{3x}$$

odnosno

$$z' = -e^x z^2.$$

Ovo je Bernoullijeva jednadžba koju u ovom specijalnom slučaju možemo riješiti separacijom. Imamo

$$-\frac{dz}{z^2} = e^x \implies \frac{1}{z} = e^x + C \implies z = \frac{1}{e^x + C}$$

pa je opće rješenje Riccatijeve ODJ dano s

$$y = e^x + z = e^x + \frac{1}{e^x + C}.$$

4. Direktnom provjerom vidimo da je $y_1 = \sin x$ partikularno rješenje ove Riccatijeve ODJ. Uvedimo supstituciju $y = \sin x + z$. Uvrštavanjem slijedi

$$\cos x + z' + (\sin x + 2\sin^2 x)(\sin x + z) - (\sin x)(\sin x + z)^2 = \sin^3 x + \cos x + \sin^2 x$$

pa dobivamo Bernoullijevu ODJ

$$z' + (\sin x)z = (\sin x)z^2$$

koju ćemo riješiti Lagrangeovom metodom. Prvo rješavamo homogenu linearnu jednadžbu $z' + (\cos x)z = 0$ do čijeg općeg rješenja lako dolazimo separacijom: $z = Ce^{\cos x}$. Opće rješenje Bernoullijeve ODJ tražimo metodom varijacije konstante u obliku $z = C(x)e^{\cos x}$. Uvrštavanjem slijedi

$$C'(x)e^{\cos x} = (\sin x)C(x)^2 e^{2\cos x} \implies \frac{C'(x)}{C^2(x)} = (\sin x)e^{\cos x} \implies -\frac{1}{C(x)} = \int (\sin x)e^{\cos x}\,dx = -e^{\cos x} + D$$

pa je

$$C(x) = \frac{1}{e^{\cos x} - D} \implies z = C(x)e^{\cos x} = \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} - D}.$$

Slijedi da je opće rješenje Riccatijeve ODJ dano s

$$y = \sin x + z = \sin x + \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} - D}.$$

5. Dijeljenjem jednadžbe s x dobivamo

$$y' - \frac{3x}{y} + \frac{1}{x}y^2 = 4x - 4,$$

što zaista jest Riccatijeva ODJ. Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_1 = ax$ za neku konstantu $a \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem dobivamo

$$a - 3a + a^2 x = 4x - 4 \iff (a^2 - 4)x + (-2a + 4) = 0.$$

Oba koeficijenta moraju biti nula pa zaključujemo da je jedina mogućnost $a = 2$. Dakle, partikularno rješenje je $y_1 = 2x$ pa uvedimo supstituciju $y = 2x + z$. Uvrštavanjem slijedi

$$2 + z' - \frac{3}{x}(2x + z) + \frac{1}{x}(2x + z)^2 = 4x - 4$$

odnosno

$$z' + \left(4 - \frac{3}{x}\right) z + \frac{z^2}{x} = 0.$$

Ovo je Bernoullijeva ODJ koju ćemo riješiti Lagrangeovom metodom. Prvo rješavamo homogenu linearnu jednadžbu

$$z' + \left(4 - \frac{3}{x}\right) z = 0 \implies \frac{dz}{z} = \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx \implies \ln|z| = -4x + 3\ln|x| + C \implies |z| = e^C |x|^3 \cdot e^{-4x}$$

pa je opće rješenje dano s $z = Dx^3 e^{-4x}$. Opće rješenje Bernoullijeve ODJ tražimo metodom varijacije konstante u obliku $z = D(x)x^3 e^{-4x}$. Uvrštavanjem slijedi

$$D'(x)x^3 e^{-4x} = D'(x)x^3 e^{-4x} + D(x)(3x^2 e^{-4x} - 4x^3 e^{-4x}) + \left(4 - \frac{3}{x}\right) D(x)x^3 e^{-4x} = -\frac{1}{x} D(x)^2 x^6 e^{-8x}$$

odnosno

$$-\frac{D'(x)}{D(x)^2} = x^2 e^{-4x} \implies \frac{1}{D(x)} = \int x^2 e^{-4x}\, dx.$$

Ovaj integral rješavamo dvostrukom parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-4x}\, dx &= \begin{bmatrix} u = x^2, & du = 2x\, dx \\ dv = e^{-4x}\, dx, & v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}x^2 e^{-4x} + \int \frac{1}{4} e^{-4x} \cdot 2x\, dx \\
&= -\frac{1}{4}x^2 e^{-4x} + \frac{1}{2}\int x e^{-4x} \cdot dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-4x}\, dx, & v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{4}x^2 e^{-4x} - \frac{1}{8} x e^{-4x} - \frac{1}{8}\int e^{-4x} dx \\
&= -\frac{1}{4}x^2 e^{-4x} - \frac{1}{8} x e^{-4x} - \frac{1}{32} e^{-4x} \\
&= -\frac{e^{-4x}}{32}(8x^2 + 4x + 1).
\end{aligned}$$

Zaključujemo

$$\frac{1}{D(x)} = -\frac{e^{-4x}}{32}(8x^2 + 4x + 1) + C \implies D(x) = \frac{1}{C - \frac{e^{-4x}}{32}(8x^2 + 4x + 1)}$$

odnosno

$$z = D(x)x^3 e^{-4x} = \frac{x^3 e^{-4x}}{C - \frac{e^{-4x}}{32}(8x^2 + 4x + 1)} = \frac{x^3}{Ce^{4x} - \frac{1}{32}(8x^2 + 4x + 1)}.$$

Sada je opće rješenje Riccatijeve ODJ dano s

$$y = 2x + z = 2x + \frac{x^3}{Ce^{4x} - \frac{1}{32}(8x^2 + 4x + 1)}$$

□