DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2
Zadaci za vježbu

1. (a) Napišite Taylorov polinom traženog stupnja za zadanu funkciju.
   - (i) stupnja 4 za $f(x) = x - \cos x$
   - (ii) stupnja 4 za $f(x) = \ln \cos x$
   - (iii) stupnja 5 za $f(x) = e^x \sin x$
   - (iv) stupnja 5 za $f(x) = \operatorname{tg} x$

   (b) Ocijenite odgovarajući ostatak u Taylorovom razvoju zadane funkcije za zadanu vrijednost argumenta.
   - (i) $R_4(0.15)$ za $\sin x$
   - (ii) $R_5(-1)$ i $R_6(2)$ za e^x
   - (iii) $R_7(0.7)$ za $\operatorname{arctg} x$
   - (iv) $R_3(-0.4)$ i $R_4(0.4)$ za $\ln(1+x)$
   - (v) $R_4(\frac{1}{11})$ za $(1+x)^{\frac{1}{3}}$

   (c) Koristeći Taylorove razvoje prikladnih funkcija izračunajte sljedeće brojeve s točnošću na četiri decimale.
   $$\sin(-0.1), \quad \cos(0.05), \quad e^{-\frac{1}{7}}, \quad \operatorname{arctg}(0.25), \quad \ln(0.3), \quad \sqrt{15}$$

   (d) Koristeći Taylorove razvoje prikladnih funkcija izračunajte sljedeće integrale na tri decimale: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$.

   (e) Izračunajte sljedeće limese kad x teži u 0.
   $$\frac{\sin x - e^x + 1}{x} \qquad \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)} \qquad \frac{(1+x)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} \qquad \frac{\sin x + \cos x - 1 - x}{x^2}$$

2. (a) Odredite da li sljedeći redovi konvergiraju.
   $$\sum \frac{\sin n}{n^2+1} \qquad \sum \frac{n+1}{2^n} \qquad \sum n^4 e^{-n} \qquad \sum \frac{\ln n}{n^{3/2}} \qquad \sum \left(\frac{k}{k+100}\right)^k$$

   (b) Odredite da li sljedeći redovi konvergiraju. Koji od njih apsolutno konvergiraju?
   $$\sum \frac{(-1)^n + \cos(3n)}{n^2+n} \qquad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+2)} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

   (c) Nađite radijuse konvergencije sljedećih redova potencija.
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n!} x^n \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

   (d) Nađite radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ i dokažite da funkcija $f(x)$ definirana tim redom na odgovorajućem intervalu zadovoljava $x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0$.

3. (a) Opišite i skicirajte nivo krivulje (za zadane vrijednosti c) sljedećih funkcija.
   $$f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}, \text{ za } c = -2,-1,1,2; \qquad g(x,y) = e^{xy}, \text{ za } c = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$$

   (b) Izračunajte sljedeće limese ako postoje.
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x} \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4xz^2\cos y}{x^2+z^2}$$

   (c) Odredite Jacobijevu matricu funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane s
   $$f(x,y,z) = \left(\frac{x^3+y^2z}{x-z}, \sqrt{x}y^2, \sin\left(\frac{xy+z}{2x}\right)\right).$$

   (d) Odredite jednadžbu tangente na put $\mathbf{c}(t) = (4e^{-t}, 6t^4, \sin(2t))$ u točki $t_0 = 0$.

   (e) Izračunajte $\mathbf{D}(g \circ f)(0,1,2)$ ako su $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane s $f(x,y,z) = (x + 2y^2 z, e^{yz}\sin x)$ i $g(u,v) = (u^2 - v, v^3 + u + 1)$.

   (f) Izračunajte derivaciju funkcije $f(x,y,z) = e^x \cos(yz)$ u točki $P_0 = (0,-1,0)$ u smjeru vektora $\mathbf{v} = (2,1,-2)$.

   (g) Odredite tangencijalne ravnine na zadane plohe u danim točkama.
   $$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \text{ u } P(1,4,1), \qquad z = \sin x + \sin y + \sin(x+y) \text{ u } P(0,0,0)$$

RJEŠENJA
Prvo pokušajte sami riješiti zadatke!

Beskorisno je samo čitati rješenja. Ovdje su navedeni samo konačni rezultati, a vi morate znati napisati potpuna rješenja.

1. (a) Napišite Taylorov polinom traženog stupnja za zadanu funkciju.
   (i) $-1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$
   (ii) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$
   (iii) $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$
   (iv) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$

   (b) Ocijenite odgovarajući ostatak u Taylorovom razvoju zadane funkcije za zadanu vrijednost argumenta.
   (i) $|R_4(0.15)| \leq \frac{|0.15|^4}{4!} < 2.2 \cdot 10^{-5}$
   (ii) $|R_5(-1)| \leq \max\{1, e^{-1}\}\frac{|-1|^5}{5!} = \frac{1}{120} < 8.4 \cdot 10^{-3}$,
   $|R_6(2)| \leq \max\{1, e^2\}\frac{|2|^6}{6!} < 9 \cdot \frac{32}{720} = \frac{2}{5} = 0.4$
   (iii) $|R_7(0.7)| \leq \frac{|0.7|^7}{7} < 1.2 \cdot 10^{-2}$
   (iv) $|R_3(-0.4)| \leq \frac{|-0.4|^3}{3(1-0.4)} = \frac{0.064}{1.8} < 3.6 \cdot 10^{-2}$,
   $|R_4(0.4)| \leq \frac{|0.4|^4}{4} = 0.0064$
   (v) $|R_4(\frac{1}{11})| \leq \left|\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!}(1+c)^{\frac{1}{3}-4}(\frac{1}{11})^4\right| < 2.9 \cdot 10^{-6}$ $(0 \leq c \leq \frac{1}{11})$

   (c) Koristeći Taylorove razvoje prikladnih funkcija izračunajte sljedeće brojeve s točnošću na četiri decimale.
   $$-0.0998, \quad 0.9988, \quad 0.8669, \quad 0.245, \quad -1.204, \quad 3.873$$

   (d) Koristeći Taylorove razvoje prikladnih funkcija izračunajte sljedeće integrale na tri decimale: $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} + E$, gdje je $|E| < 10^{-3}$, dakle vrijednost danog integrala na tri decimale je 0.747; $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx = 0.968$ na tri decimale.

   (e) Izračunajte sljedeće limese kad x teži u 0: 0, 1, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{2}$.

2. (a) Odredite da li sljedeći redovi konvergiraju.
   da, usporedba sa $\sum \frac{1}{n^2}$;
   da, D'Alambertov kriterij (u obliku s limesom);
   da, usporedba sa $\sum \frac{1}{n^2}$ ili D'Alambertov kriterij (oboje u obliku s limesom);
   da, usporedba s npr. $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ (u obliku s limesom) ili integralni test (parcijalno integrirajte da dobijete vrijednost integrala, a onda primjenite L'Hospitalovo pravilo);
   ne, opći član $\big(k/(k+100)\big)^k = \big((1+\frac{100}{k})^{k/100}\big)^{-100} \to e^{-100} \neq 0$ kad $k \to \infty$

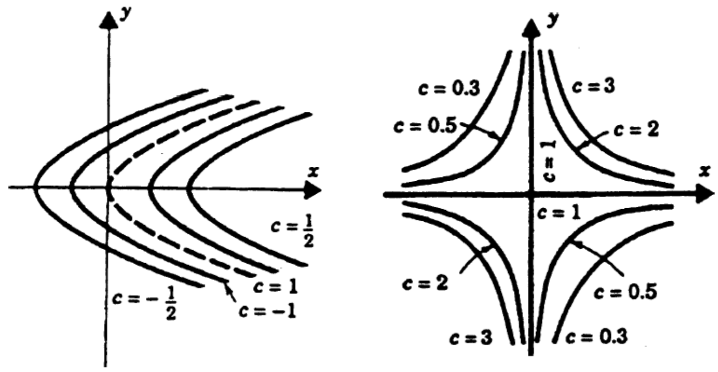
   (b) Odredite da li sljedeći redovi konvergiraju. Koji od njih apsolutno konvergiraju?
   apsolutno konvergira, pa i uvjetno konvergira, usporedbom s $\sum \frac{1}{n^2}$;
   ne konvergira apsolutno, usporedbom s npr. $\sum \frac{1}{n}$ ili integralnim kriterijem, konvergira uvjetno, dokazujemo pomoću Leibnizovog kriterija;
   ne konvergira uvjetno, pa ni apsolutno jer $|\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}| \to 1 \neq 0$ kad $n \to \infty$

   (c) Nađite radijuse konvergencije sljedećih redova potencija.
   Koristeći $r = 1/(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})$ dobivamo redom $r = \infty, 1, e$.

   (d) Nađite radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ i dokažite da funkcija $f(x)$ definirana tim redom na odgovorajućem intervalu zadovoljava $x^2 f''(x) + xf'(x) + x^2 f(x) = 0$.
   Radijus konvergencije je ∞, pa na čitavom $\mathbb{R}$ možemo derivirati red član po član. Nakon deriviranja dva puta i uvrštavanja te izjednačavanja koeficijenata dokaz relacije se svodi na
   $$\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} + \frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2 2^{2(n-1)}} = 0, \quad \text{za } n \geqslant 1,$$

tj. $\frac{2n-1}{2n}+\frac{1}{2n}-1=0$ što očito vrijedi.

3. (a) Opišite i skicirajte nivo krivulje (za zadane vrijednosti c) sljedećih funkcija.
Za funkciju f su nivo krivulje parabole $x-y^2=\frac{1}{c}$, a za funkciju g su nivo krivulje koordinatne osi i hiperbole $xy=\ln c$.



(b) Izračunajte sljedeće limese ako postoje.
ako se približavamo ishodištu po proizvoljnom pravcu $y=mx$, imamo $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{x^2+m^2}=0$, ali ako se približavamo po paraboli $y=x^2$, imamo $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$ što znači da $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ ne postoji;
imamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(xy)-1}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(xy)-1}{(xy)^2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy^2=-\frac{1}{2}\cdot0$ jer $xy\to0$ kad $(x,y)\to(0,0)$ i $\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t^2}=-\frac{1}{2}$;
kako je za sve realne brojeve x i z uvijek $|2xz|\le x^2+z^2$, imamo $0\le\left|\frac{4xz^2\cos y}{x^2+z^2}\right|\le|z\cos y|$, a $z\cos y\to0\cdot1$ kad $(x,y,z)\to(0,0,0)$, pa je traženi limes jednak 0

(c) Odredite Jacobijevu matricu dane funkcije:

$$\mathbf{D}f(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{3x^2}{x-z}-\frac{x^3+y^2z}{(x-z)^2} & \frac{2yz}{x-z} & \frac{y^2}{x-z}+\frac{x^3+y^2z}{(x-z)^2}\\ \frac{y^2}{2\sqrt{x}} & 2\sqrt{x}y & 0\\ \frac{-z}{2x^2}\cos\left(\frac{xy+z}{2x}\right) & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{xy+z}{2x}\right) & \frac{\cos\left(\frac{xy+z}{2x}\right)}{2x} \end{bmatrix}$$

(d) Odredite jednadžbu tangente na dani put u zadanoj točki.
Jednadžba tangente glasi $l(t)=\mathbf{c}(t_0)+(t-t_0)\mathbf{c}'(t_0)$, pa nakon uvrštavanja $t_0=0$ u $\mathbf{c}(t)$ i $\mathbf{c}'(t)=(-4e^{-t},24t^3,2\cos(2t))$ dobivamo $\mathbf{c}(0)=(4,0,0)$, $\mathbf{c}'(0)=(-4,0,2)$ iz čega je $l(t)=(4,0,0)+t(-4,0,2)$, tj. u parametarskom obliku $x=4-4t$, $y=0$, $z=2t$. Kanonska jednadžba ovog pravca dobiva se eliminacijom parametra t i glasi $\frac{x-4}{-4}=\frac{y}{0}=\frac{z}{2}$.

(e) Izračunajte $\mathbf{D}(g\circ f)(0,1,2)$ za zadane funkcije f i g.
Po pravilu o deriviranju kompozicije je

$$\mathbf{D}(g\circ f)(0,1,2)=\mathbf{D}g\big(f(0,1,2)\big)\cdot\mathbf{D}f(0,1,2)$$

$$=\begin{bmatrix}2u & -1\\ 1 & 3v^2\end{bmatrix}_{(u,v)=(4,0)}\begin{bmatrix}1 & 4yz & 2y^2\\ e^{yz}\cos(x) & e^{yz}z\sin(x) & e^{yz}y\sin(x)\end{bmatrix}_{(x,y,z)=(0,1,2)}$$

$$=\begin{bmatrix}8-e^2 & 64 & 16\\ 1 & 8 & 2\end{bmatrix}$$

(f) Izračunajte derivaciju dane funkcije u smjeru zadanog vektora.

$$\nabla f(P_0)\cdot\mathbf{v}=(e^x\cos(yz),-ze^x\sin(yz),-ye^x\sin(yz))_{(x,y,z)=(0,-1,0)}\cdot(2,1,-2)=1\cdot2+0\cdot1+0\cdot(-2)=2$$

(g) Odredite tangencijalne ravnine na zadane plohe u danim točkama.
Za $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ tang. ravnina na nivo-plohu $f(x,y,z)=4$ u točki $(1,4,1)$ ima jednadžbu $\nabla f(1,4,1)\cdot(x-1,y-4,z-1)=0$, tj. $2x+y+2z-8=0$,
Za $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)-z$ tang. ravnina na nivo-plohu $f(x,y,z)=0$ u točki $(0,0,0)$ ima jednadžbu $\nabla f(0,0,0)\cdot(x-0,y-0,z-0)=0$, tj. $2x+2y-z=0$.