Zadaci za vježbu

1) Nađi stacionarne točke i lokalne ekstreme:

   a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ R:lok min u $(4, -2)$.
   b) $f(x,y) = y + x\sin y$ R: sedla u $(-1, 2n\pi)$ i $(1, (2n+1)\pi)$ $n \in \mathbb{Z}$.
   c) $f(x,y) = (x-3)\ln xy$ R: sedlo u $(3, \frac{1}{3})$.
   d) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ R: lok min u $(0,0)$, sedlo u $(0, \pm 1)$.

2) Odredi globalne ekstreme:

   a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2;\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x$.
   R: glob maks u $(2,4)$, glob min u $(1,1)$.
   b) $f(x,y) = 2 - 3x + 2y$ na trokutu s vrhovima $(0,0), (4,0)$ i $(0,6)$.
   R: glob maks u $(0,6)$, glob min u $(4,0)$.
   c) $f(x,y) = y(x-3);\ x^2 + y^2 \le 9$.
   R: glob maks u $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$, glob min u $(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.
   d) $f(x,y) = 3 + x - y + xy$ na skupu omeđenom sa $y = x^2$ i $y = 4$.
   R: glob maks u $(2,4)$, glob min u $(-2,4)$.

3) Nađi vezani ekstrem:

   a) Minimiziraj $x^2 + y^2$ na $xy = 1$. R: u $(1,1)$ i $(-1,-1)$.
   b) Maksimiziraj x^2+y^2 na $x^4+7x^2y^2+y^4 = 1$. R: u $(\pm 1, 0)$ i $(0, \pm 1)$.
   c) Maksimiziraj $2x + 3y + 5z$ na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 19$.
   R: u $(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2})$.
   d) Minimiziraj $x^4 + y^4 + z^4$ na $x + y + z = 1$. R: u $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

4) Za danu F odredi ako postoji f tako da je $F = \nabla f$:

   a) $F(x,y) = (xy^2, x^2y)$. R: $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C$.
   b) $F(x,y) = (\cos x - y\sin x, \cos x)$. R: $f(x,y) = \sin x + \cos x + C$.
   c) $F(x,y,z) = (y^2z^3 + 1, 2xyz^3 + y, 3xy^2z^2 + 1)$.
   R: $f(x,y,z) = xy^2z^3 + x + \frac{1}{2}y^2 + z + C$.
   d) $F(x,y,z) = (\frac{y}{z} - e^z, \frac{x}{z} + 1, -xe^z - \frac{xy}{z^2})$. R: $f(x,y,z) = \frac{xy}{z} - xe^z + y + c$.

5) Izračunaj integrale na Ω:

a) $\iint_\Omega e^{x+y}\, dxdy \quad \Omega \ldots\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3.$ R: 1.

b) $\iint_\Omega \sin(x+y)\, dxdy \quad \Omega \ldots\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi.$ R: 2.

c) $\iint_\Omega e^{x^2}\, dxdy \quad \Omega$ skup omeđen x-osi te $2y = x$ i $x = 2$.
R: $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$.

d) $\iint_\Omega \cos(x^2+y^2)\, dxdy \quad \Omega \ldots\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4.$
R: $\pi(\sin 4 - \sin 1)$.(polarne)

e) $\iint_\Omega \sin(x-y)\cos(x+2y)\, dxdy$
Ω omeđen sa $x - y = 0, x - y = \pi, x + 2y = 0, x + 2y = \frac{1}{2}\pi$.
R: $\frac{2}{3}$, zamjena koordinata $u = x - y, v = x + 2y$.

6) Izračunaj integral:

a) $\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_1^3 (z - xy)\, dydxdz.$ R: 8.

b) $\int_{-1}^2 \int_1^{y-2} \int_e^{e^2} \frac{x+y}{z}\, dzdxdy.$ R : $\frac{3}{2}$.

c) $\int_0^1 \int_1^{2y} \int_0^x (x+2z)\, dzdxdy.$ R : $\frac{2}{3}$.

d) $\iiint_T 2ye^x\, dxdydz.$ T dan sa $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq x + y.$
R : $4e - \frac{29}{3}$.

e) $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz.$
$T \ldots -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq -\sqrt{1-x^2}, x^2+y^2 \leq z \leq 2 - (x^2+y^2).$ R : $\frac{8\pi}{15}$ (cilindričke).

f) $\iiint_T e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz.$ $T \ldots\ x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0.$
R: $\frac{1}{3}\pi(e-1)(2-\sqrt{2})$ (sferičke).

7) Izračunaj

a) Odredi duljinu krivulje $c(t) = (e^t(\cos t), e^t(\sin t)), \quad t \in [1, 3].$
R : $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

b) $\int_c ydx + xdy$, $c(t) = (t, t^2),\ t \in [0, 1].$ R : 1.

c) $\int_c \cos x dx + \sin y dy + yzdz,\ c(t) = (t^2, -t^3, t)\ t \in [0, 1].$
R: $\frac{4}{5} + \sin 1 - \cos 1$.

d) Koristeći Greenov teorem izračunaj $\int_c xydx + x^2dy$ gdje je c pozitivno orjentiran rub trokuta s vrhovima $(0, 0), (0, 1)$ i $(1, 1)$.
R : $\frac{1}{6}$.

e) Koristeći Greenov teorem izračunaj $\int_c e^x \cos y dx + e^x \sin y dy$ gdje je c pozitivno orjentiran rub četverokuta s vrhovima $(0, 0), (1, 0), (1, \pi)$ i $(0, \pi)$. R : $4(e - 1)$.

8) Izračunaj

a) Izračunaj površinu plohe $z = y^2,\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
R : $\frac{1}{4}[2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})]$

b) Izračunaj površinu plohe $z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 1$.
R : $\sqrt{2}\pi$

c) Izračunaj $\iint x^2 z d\sigma$, S dio cilindra $x^2 + z^2 = 1$ između $y = 0$ i $y = 2$, te $z \geq 0$. R : $\frac{4}{3}$.

d) Izračunaj $\iint x^2 + y^2 d\sigma$, S ... $z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$. R :$\frac{25\sqrt{5}+1}{60}\pi$

e) Neka je S jedinična sfera orjentirana prema vani, $F = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ vektorsko polje. Izračunaj $\iint_S F dS$. R : $\frac{12\pi}{5}$.

f) Izračunaj intergral vektorskog polja $F = (y, -x, z^2)$ duž parametrizirane plohe $X(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. R : $-\frac{\pi}{3}$

9) a) Neka je na okolini kocke K ... $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ dano vektorsko polje $F(x, y, z) = (x^2, -xz, z^2)$. Provjeri teorem divergencije tj. $\iiint_K (divF) dxdydz = \iint_{\partial K} F dS$.(rub orjentiran vani)

b) Neka je na okolini skupa K ... $x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 1$ dano vektorsko polje $F(x, y, z) = (x, 2y^2, 3z^2)$. Provjeri teorem divergencije tj. $\iiint_K (divF) dxdydz = \iint_{\partial K} F dS$.(rub orjentiran vani)

c) Neka je S $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0,\ F = (y, -x, z)$ provjeri Stokesov teorem tj. $\iint_S (rotF) dS = \int_c F dc$ gdje je c rub od S koji naslijeđuje orjentaciju od S tj. ako je S orjentiran prema vani c ima pozitivnu orjentaciju u xy ravnini.

d) Neka je S trokut s vrhovima (2,0,0), (0,2,0) i (0,0,2) na koji gledamo kao na plohu s rubom uz orjentaciju od ishodišta. Koristeći Stokesov teorem izračunaj $\iint_S (rot\ F) dS$, gdje je
$F = (x^2 + y^2, y^2, x^2 + z^2)$. R : $\frac{16}{3}$.