MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 1 (6 bodova)

(a) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \sqrt{\log_x(x^2+2x-3)} + \ln\left(\frac{\sin x}{\frac{1}{2} - \sin x}\right).$$

(b) Odredite neku elementarnu funkciju (ili kompoziciju elementarnih funkcija) čija je prirodna domena $\mathbb{R} \setminus 4\mathbb{Z}$.

Rješenje.

(a)

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\, \pi + 2k\pi\right) \cup \left(2\pi + 2k\pi,\, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

(b) npr. $f(x) = \dfrac{1}{\sin \frac{x\pi}{4}}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 2 (6 bodova) Nađite sliku funkcije

$$f(x) = 3^{\ln^2(x) - 2\ln(\frac{1}{x}) + 2}$$

te odredite prasliku $f^{-1}(\langle -\infty, 9])$.

Rješenje. $\mathcal{R}_f = [3, \infty\rangle$, $\qquad f^{-1}(\langle -\infty, 9]) = [e^{-2}, 1]$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 3 (7 bodova) Je li funkcija

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg}\left(\pi \sqrt[3]{x-1}\right)} + e^{\operatorname{tg}\left|\pi \sqrt[3]{x-1}\right|}}{2}$$

injekcija na intervalu $I = \left\langle \frac{7}{8}, 1 \right\rangle$? Ako jest, odredite joj inverz na tom intervalu.
(Uputa: Koristite hiperbolne funkcije.)

Rješenje. Da.

$$\left(f\big|_I\right)^{-1} : \langle 1, \infty\rangle \to \left\langle \frac{7}{8}, 1 \right\rangle, \qquad \left(f\big|_I\right)^{-1}(y) = 1 + \left(\frac{\operatorname{arctg}(-\operatorname{Arch} y)}{\pi}\right)^3$$

$$= 1 - \left(\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{Arch} y)}{\pi}\right)^3.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 4 (6 bodova) Neka je $a > 0$, i neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija sa svojstvom da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je $0 < y - x < a$ vrijedi $f(x) < f(y)$. Dokažite ili opovrgnite:

(a) f je nužno injekcija.

(b) f je nužno surjekcija.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 1 (6 bodova)

(a) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \ln\big(\log_x(x^2 - 2x - 3)\big) + \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \cos x}{\cos x}}.$$

(b) Odredite neku elementarnu funkciju (ili kompoziciju elementarnih funkcija) čija je prirodna domena $\mathbb{R} \setminus 3\mathbb{Z}$.

Rješenje.

(a)

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

(b) npr. $f(x) = \dfrac{1}{\sin \frac{x\pi}{3}}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 2 (6 bodova) Nađite sliku funkcije

$$f(x) = \log_2\left(4^x + 2^{x+1}\right)$$

te odredite prasliku $f^{-1}(\langle -\infty, 3\rangle)$.

Rješenje. $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$, $\quad f^{-1}(\langle -\infty, 3\rangle) = \langle -\infty, 1\rangle$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 3 (7 bodova) Je li funkcija

$$f(x) = \frac{e^{-\operatorname{ctg}\left(\pi\sqrt[3]{x+1}\right)} + e^{\operatorname{ctg}\left|\pi\sqrt[3]{x+1}\right|}}{2}$$

injekcija na intervalu $I = \left\langle -\frac{7}{8}, 0\right\rangle$? Ako jest, odredite joj inverz na tom intervalu.
(Uputa: Koristite hiperbolne funkcije.)

Rješenje. Da.

$$\left(f\big|_I\right)^{-1} : \langle 1, \infty\rangle \to \left\langle -\frac{7}{8}, 0\right\rangle, \qquad \left(f\big|_I\right)^{-1}(y) = -1 + \left(\frac{\operatorname{arcctg}(-\operatorname{Arch} y)}{\pi}\right)^3 = -1 + \left(1 - \frac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{Arch} y)}{\pi}\right)^3.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

1. kolokvij - 21. studenog 2014.

Zadatak 4 (6 bodova) Neka je $a > 0$, i neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija sa svojstvom da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je $0 < y - x < a$ vrijedi $f(x) > f(y)$. Dokažite ili opovrgnite:

(a) f je nužno injekcija.

(b) f je nužno surjekcija.