MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Korištenjem tabličnih limesa pokažite da je za sve $a < 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{a}{n+1}} = 1.$$

(b) (4 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k} k^2}{n^3 + \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\frac{2k}{k+1}}}.$$

Rješenje.

(a) Uočimo da je $n^{\frac{a}{n+1}} = (n^{\frac{1}{n}})^{\frac{an}{n+1}} = (n^{\frac{1}{n}})^{a-\frac{a}{n+1}}$. Kako je $a \le a - \frac{a}{n+1} \le \frac{a}{2}$ za sve $n \in \mathbf{N}$, slijedi da je

$$(n^{\frac{1}{n}})^a \le n^{\frac{a}{n+1}} \le (n^{\frac{1}{n}})^{\frac{a}{2}},\ n \in \mathbf{N}.$$

Korištenjem limesa $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, neprekidnosti funkcija $x \mapsto x^a$ i $x \mapsto x^{\frac{a}{2}}$, te teorema o sendviču slijedi da je

$$1 = (\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}})^a \le \lim_{n\to\infty} n^{\frac{a}{n+1}} \le (\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}})^{\frac{a}{2}} = 1,$$

što dokazuje traženu tvrdnju.

(b) Označimo nizove $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k} k^2$ i $b_n = n^3 + \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\frac{2k}{k+1}}$, $n \in \mathbf{N}$. Uočimo da je niz b_n strogo rastući i neograničen (niz $(n^3)_{n\in\mathbf{N}}$ je strogo rastući i neograničen, te je $n^{\frac{2n}{n+1}} > 0$ za svaki $n \in \mathbf{N}$). Sada po Stolzovom teoremu slijedi da je tada

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} n^2}{n^3 - (n-1)^3 + n^{\frac{2n}{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} n^2}{n^2 + n(n-1) + (n-1)^2 + n^{\frac{2n}{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}}{1 + 1 - \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})^2 + n^{\frac{-2}{n+1}}} \\
&= \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2}}{1 + 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + (1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n})^2 + \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{-2}{n+1}}} = \frac{e^{-2}}{4},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjem redu koristili neprekidnost funkcija $fx \mapsto x^p$ za $p \in \mathbf{R}$ i (a) dio zadatka.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

Zadatak 2. (7 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \sin\left(\frac{(-1)^n nm^2 + 2m^2 + (-1)^n n + 2}{2nm^2 + nm + 10m^2 + 5m} \right) : n, m \in \mathbf{N} \right\}.$$

Rješenje. Uočimo da se skup S može zapisati kao:

$$S = \left\{ \sin\left(\frac{(-1)^n n + 2}{n+5} \cdot \frac{m^2+1}{2m^2+m} \right) : n, m \in \mathbf{N} \right\}.$$

Definirajmo sada skupove $A = \left\{ \frac{(-1)^n n+2}{n+5} : n \in \mathbf{N} \right\}$ i $B = \left\{ \frac{m^2+1}{2m^2+m} : m \in \mathbf{N} \right\}$. Nadalje, skup A se može prikazati kao unija skupova $A_1 = \left\{ \frac{2n+2}{2n+5} : n \in \mathbf{N} \right\}$ i $A_2 = \left\{ \frac{-2n+3}{2n+4} : n \in \mathbf{N} \right\}$. Sada računamo:

A_1 : Za niz $a_n = \frac{2n+2}{2n+5}$ vrijedi da je rastući i omeđen odozgo s 1, pa je konvergentan i zaključujemo da je $\inf A_2 = \min A_2 = a_1 = \frac{4}{7}$ i $\sup A_2 = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

A_2 : Za niz $b_n = \frac{-2n+3}{2n+4}$ vrijedi da je padajući i omeđen odozdo s -1, pa je konvergentan i zaključujemo da je $\inf A_2 = \lim_{n\to\infty} b_n = -1$ i $\sup A_2 = \max A_2 = b_1 = \frac{1}{6}$.

A : Kako za skup A vrijedi da je $A = A_1 \cup A_2$, zaključujemo da je $\inf A = \min\{\frac{4}{7}, -1\} = -1$ i $\sup A = \max\{1, \frac{1}{6}\} = 1$.

B : Za niz $x_m = \frac{m^2+1}{2m^2+m}$ vrijedi da je $x_m \leq x_{m+1}$ za $m \geq 4$, odnosno niz x_m je rastući počevši od četvrtog člana. Također, x_m je omeđen odozgo s 1, pa je konvergentan. Kako vrijedi $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq \ldots$, to zaključujemo da je $\inf B = \min B = x_4 = \frac{17}{36}$ i $\sup B = \max\{x_1, \lim_{m\to\infty} x_m\} = \max\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\} = \frac{2}{3}$.

Sada zaključujemo da je

$$\inf\left((A_1 \cup A_2) \cdot B\right) = \min\{1 \cdot \tfrac{2}{3}, 1 \cdot \tfrac{17}{36}, -1 \cdot \tfrac{2}{3}, -1 \cdot \tfrac{17}{36}\} = -\tfrac{2}{3}$$

i

$$\sup\left((A_1 \cup A_2) \cdot B\right) = \max\{1 \cdot \tfrac{2}{3}, 1 \cdot \tfrac{17}{36}, -1 \cdot \tfrac{2}{3}, -1 \cdot \tfrac{17}{36}\} = \tfrac{2}{3}.$$

Primijetimo da je $(A_1 \cup A_2) \cdot B \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pa je skup S zapravo jednak $S = \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}((A_1 \cup A_2) \cdot B)$. Kako je $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ strogo rastuća i neprekidna funkcija, zaključujemo da je

$$\inf S = \sin\left(-\tfrac{2}{3}\right) \quad \text{i} \quad \sup S = \sin\left(\tfrac{2}{3}\right).$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Koristeći teorem o sendviču odredite limes

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^{n+1} + 2^{n+2} + 3^{n+3} + \cdots + 2021^{n+2021}}.$$

(b) (4 boda) Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ padajuća funkcija, te neka je niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ takav da je $a_1 = 1$ i

$$a_{n+1} = a_n + f(a_n) \quad \text{za sve } n \in \mathbf{N}.$$

Dokažite da je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Rješenje.

(a) Uočimo da za svaki $k \leq 2021$ vrijedi $k^{n+k} \leq 2021^{n+k} \leq 2021^{n+2021}$. Zato je

$$2021^{n+2021} \leq 1^{n+1} + 2^{n+2} + 3^{n+3} + \cdots + 2021^{n+2021} \leq 2021 \cdot 2021^{n+2021} = 2021^{n+2022},$$

pa je

$$2021^{(n+2021)/n} \leq \sqrt[n]{1^{n+1} + 2^{n+2} + 3^{n+3} + \cdots + 2021^{n+2021}} \leq 2021^{(n+2022)/n}.$$

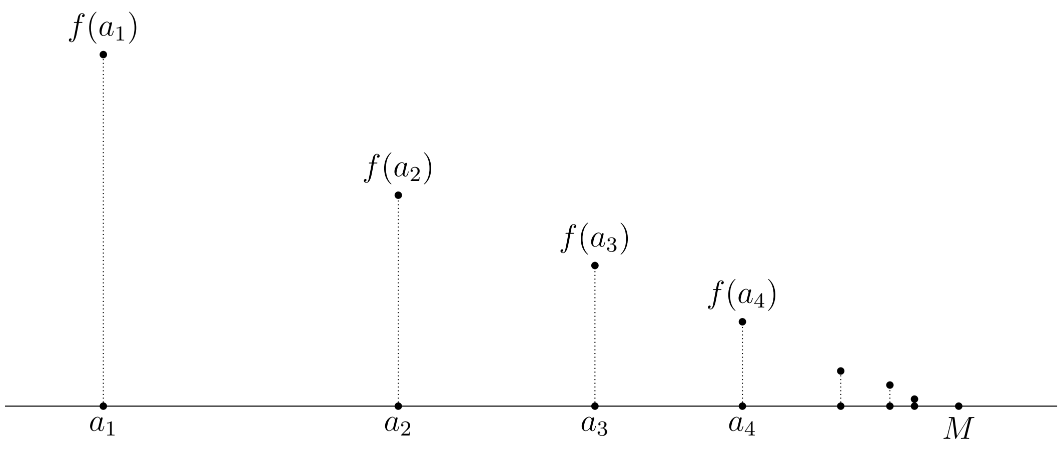
Pustivši $n \to \infty$ te koristeći neprekidnost funkcije $x \mapsto 2021^x$ i teorem o sendviču dobivamo da je traženi limes jednak 2021.

(b) Budući da f poprima isključivo pozitivne vrijednosti, iz definicije niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zaključujemo da je rastući. Ako pretpostavimo da zaključak koji želimo dokazati nije istinit, slijedi da je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergentan. Neka je $M = \lim_{n\to\infty} a_n$, te uočimo da je M gornja međa (štoviše, supremum) promatranog niza.

Budući da je f padajuća, vrijedi da je

$$0 < f(M) \leq f(a_n) = a_{n+1} - a_n, \tag{1}$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi iz zadane rekurzivne relacije. Budući da je $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = M$, puštanjem $n \to \infty$ u (1) iz teorema o sendviču dobivamo da je $f(M) = 0$, što je nemoguće jer je kodomena funkcije f skup $\langle 0, +\infty\rangle$.



MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

Zadatak 4.

(a) (4 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\ln\cos x^2}{x^7 \operatorname{tg} x}.$$

(b) (2 boda) Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija neprekidna u bar jednoj točci takva da vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{za sve } x, y \in \mathbf{R}.$$

Dokažite da je f neprekidna na cijelom $\mathbf{R}$.

Rješenje.

(a) Uočimo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\ln\cos x^2}{x^7 \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos\ln\cos x^2}{(\ln\cos x^2)^2} \left(\frac{\ln(1+(\cos x^2 - 1))}{\cos x^2 - 1} \right)^2 \left(\frac{\cos x^2 - 1}{(x^2)^2} \right)^2 \frac{x}{\sin x} \cos x \right).$$

Budući da su limesi $\lim_{x\to 0} \ln\cos x^2$, $\lim_{x\to 0}(\cos x^2 - 1)$ i $\lim_{x\to 0} x^2$ jednaki 0, koristeći zamjenu varijabli dobivamo poznate limese

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\ln\cos x^2}{(\ln\cos x^2)^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}, \\
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(\cos x^2 - 1))}{\cos x^2 - 1} &= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1, \\
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{(x^2)^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je traženi limes jednak

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{8}.$$

(b) Neka je a neka točka u kojoj je f neprekidna. Tada za proizvoljni $b \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(b+h) - f(b) = f(h) = f(a+h) - f(a) \quad \text{za sve } h \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Budući da je f neprekidna u a, za proizvoljni $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|f(a+h) - f(a)| < \epsilon \quad \text{za sve } |h| < \delta.$$

Međutim, iz (2) sada slijedi da je i

$$|f(b+h) - f(b)| < \epsilon \quad \text{za sve } |h| < \delta,$$

pa je f neprekidna i u b.