Dijeljenje polinoma

Franka Miriam Brückler

17. listopada 2023.

Dijeljenje polinoma analogno je dijeljenju prirodnih brojeva. Kao što $17 : 2 = 8$ i ostatak 1 znači da je $17 = 2\cdot 8+1$, tako i $(4x^3+1)/(2x^2-x) = 2x+1$ i ostatak $x+1$ znači da je $4x^3+1 = (2x^2-x)\cdot(2x+1)+(x+1)$.

Također, kao što pri dijeljenju brojeva kažemo da je djeljenik djeljiv s djeliteljem ako je ostatak 0 (primjerice, 54 je djeljivo s 9 jer je $54 = 9\cdot 6+0$), tako je i kod polinoma: Polinom x^3+1 je djeljiv s polinomom $x+1$ jer je $x^3+1 = (x+1)\cdot(x^2-x+1)+0$.

Nadalje, kao što je pri dijeljenju prirodnih brojeva ostatak uvijek manji od djelitelja, tako je i kod dijeljenja polinoma ostatak uvijek manjeg stupnja od djelitelja.

Općenito vrijedi

Teorem 1 (Teorem o dijeljenju polinoma) *Za svaka dva polinoma $p(x)$ i $q(x)$ postoje polinomi $r(x)$ i $o(x)$ takvi da je*

$$p(x) = q(x)\cdot r(x) + s(x).$$

Pritom je stupanj od $s(x)$ manji od stupnja od $q(x)$.

U gornjem teoremu polinom $r(x)$ nazivamo kvocijentom (količnikom) polinoma $p(x)$ i $q(x)$, a polinom $s(x)$ je ostatak pri dijeljenju. Ako jednakost $p(x) = q(x)\cdot r(x)+s(x)$ podijelimo s $q(x)$, dobivamo alternativni zapis racionalnog izraza $\frac{p(x)}{q(x)}$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)}.$$

Kako odrediti kvocijent dva polinoma? Postupak je opet sličan 'ručnom' dijeljenju prirodnih brojeva, pri čemu se u svakom koraku dijele vodeći članovi djeljenika i djelitelja te od trenutnog djeljenika oduzima umnožak trenutnog kvocijenta s djeliteljem, sve dok stupanj ostatka ne padne ispod stupnja djelitelja. Najlakše je to objasniti na primjeru.

Primjer 1 *Potrebno je racionalnu funkciju zadanu formulom*

$$f(x) = \frac{12x^4 - x^3 + 8}{3x^3 + 2x^2}$$

zapisati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije (kojoj je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika).

Stoga dijelimo polinom $12x^4 - x^3 + 8$ *s polinomom* $3x^3 + 2x^2$*. U prvom koraku dijelimo vodeći član* $12x^4$ *s vodećim članom* $3x^3$ *i dobijemo* $4x$*. To zapisujemo ovako:*

$$(12x^4 - x^3 + 8) : (3x^3 + 2x^2) = 4x.$$

Da dovršimo prvi korak, potrebno je trenutni rezultat ($4x$) *pomnožiti s djeliteljem* $3x^3 + 2x^2$ *te taj umnožak* ($4x \cdot (3x^3 + 2x^2) = 12x^4 + 8x^3$) *oduzeti od djeljenika:*

$$\begin{array}{l}
(12x^4 - x^3 + 8) : \quad (3x^3 + 2x^2) = \quad 4x \\
\underline{12x^4 + 8x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
-9x^3 + 8
\end{array}$$

Nastavljamo zamjenjujući 'starog' djeljenika s trenutnim ostatkom $-9x^3 + 8$*. Njemu je vodeći član* $-9x^3$*, kojeg dijelimo s vodećim članom djelitelja* $3x^3 + 2x^2$*; dobijemo* -3 *i to pribrajamo prethodnom kvocijentu* $4x$*:*

$$\begin{array}{l}
(12x^4 - x^3 + 8) : \quad (3x^3 + 2x^2) = \quad 4x - 3 \\
\underline{12x^4 + 8x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
-9x^3 + 8
\end{array}$$

Opet, da dovršimo ovaj korak, rezultat -3 *iz ovog koraka množimo s djeliteljem* $3x^3 + 2x^2$ *te taj umnožak* $-3 \cdot (3x^3 + 2x^2) = -9x^3 - 6x^2$ *oduzimamo od ostatka iz prethodnog koraka:*

$$\begin{array}{l}
(12x^4 - x^3 + 8) : \quad (3x^3 + 2x^2) = \quad 4x - 3 \\
\underline{12x^4 + 8x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
-9x^3 + 8 \\
\underline{-9x^3 - 6x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
6x^2 + 8
\end{array}$$

Ostatak je sad stupnja manjeg od stupnja djelitelja, te znamo da smo gotovi s dijeljenjem. Stoga je

$$12x^4 - x^3 + 8 = (3x^3 + 2x^2) \cdot (4x - 3) + (6x^2 + 8),$$

odnosno

$$f(x) = \frac{12x^4 - x^3 + 8}{3x^3 + 2x^2} = 4x - 3 + \frac{6x^2 + 8}{3x^3 + 2x^2}.$$