Zadatak. Kvadrat u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima vrhove $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, $D = (0,1)$. Matrica $M \in M_2$ predstavlja linearni operator $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$.

U kakve četverokute $\hat{M}$ može preslikati naš kvadrat? Ako je drugi kvadrat određen vrhovima $(4,4)$, $(6,2)$, $(8,4)$, $(6,6)$, uz koje uvjete na M će se oba kvadrata preslikati u isti tip četverokuta?

Rješenje. Znamo da je

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Također, znamo da je fiksirana baza $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, jer je rečeno da se pretpostavlja Kartezijev koordinatni sustav, pa se sve koordinate i M kao matrica linearnog operatora odnose na nju. Stoga je

$$\hat{M}\vec{i} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a\vec{i} + c\vec{j},$$

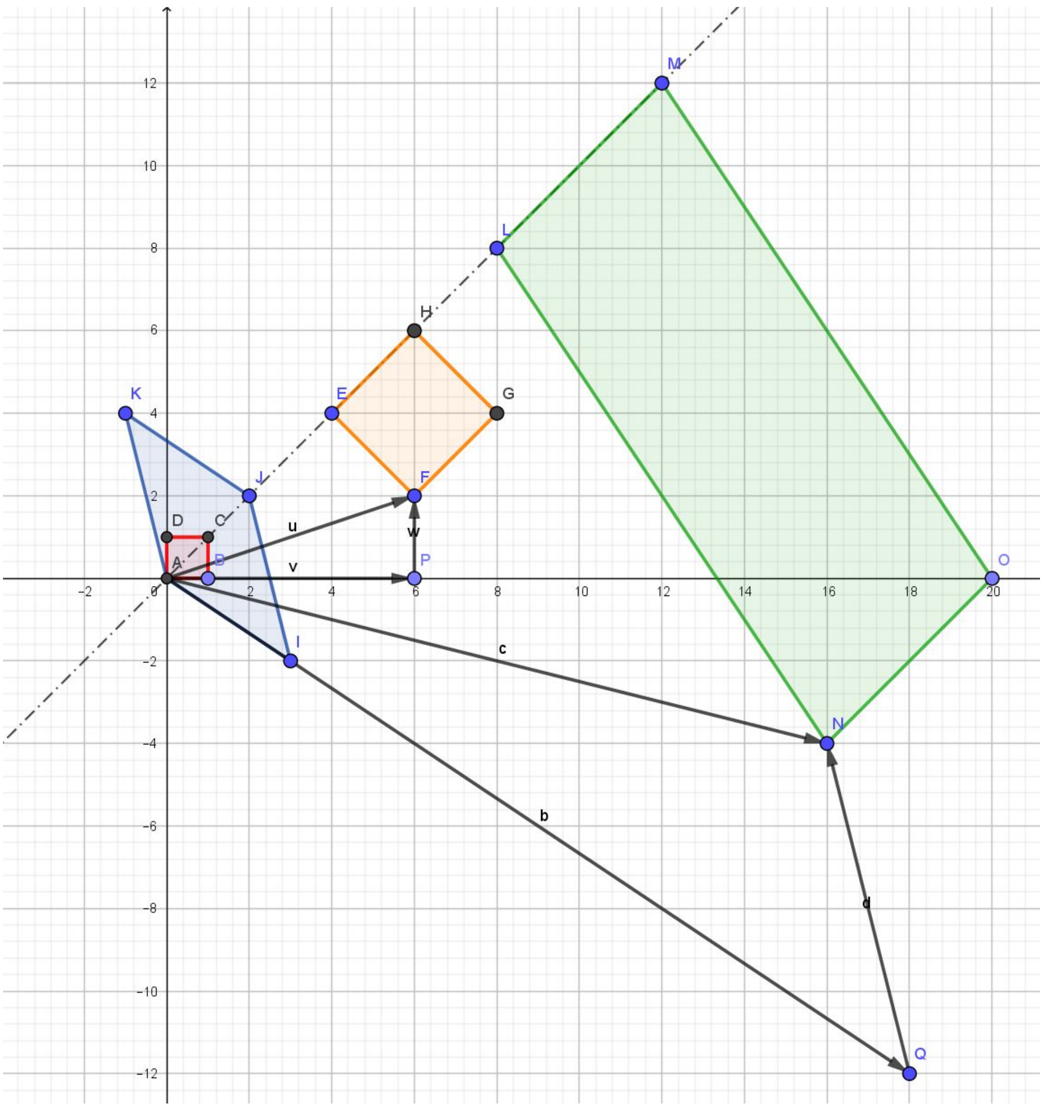
$$\hat{M}\vec{j} = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b\vec{i} + d\vec{j}.$$

Budući da linearni operatori na $V^2(O)$ pravce koji prolaze kroz ishodište preslikavaju u pravce koji prolaze kroz ishodište i budući da svaki linearan operator nulvektor domene preslikava u nulvektor domene, slijedi da se stranica kvadrata $\overline{AB}$ preslikava u $\overline{AI}$, gdje je $I = (a,b)$, a da se stranica kvadrata $\overline{AD}$ preslikava u $\overline{AK}$, gdje je $K = (c,d)$. Dijagonala $\overline{AC}$ se pak preslikava u $\overline{AJ}$, gdje je radij-vektor točke J jednak

$$\hat{M}[1,1] = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix},$$

što je zbroj radij-vektora od B' i D', tj. dijagonala polaznog kvadrata $ABCD$ preslikava se u dijagonalu rezultata te je rezultat uvijek paralelogram s vrhom u ishodištu. Taj paralelogram može biti degeneriran (može biti dužina ako je jedan od stupaca matrice M nulstupac, odnosno može biti samo ishodište ako je M nulmatrica).

Radij-vektori točaka koje su vrhovi drugog spomenutog kvadrata preslikavaju se redom u točke L, N, O, M s radij-vektorima $M \cdot [4,4] = [4a + 4b, 4c + 4d]$, $M \cdot [6,2] = [6a + 2b, 6c + 2d]$, $M \cdot [8,4] = [8a + 4b, 8c + 4d]$, $M \cdot [6,6] = [6a + 6b, 6c + 6d]$, pa će se uvijek ponovno raditi o paralelogramu.



Na slici gore se lijepo vidi da je primjerice $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PF} = 6\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$, pa je $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON} = 6\hat{M}\,\overrightarrow{i} + 2\hat{M}\,\overrightarrow{j}$.