Dodatak gradivu o determinantama

Promotrimo prostor geometrijskih vektora $V^3(O)$. Neka je dana neka njegova desna baza $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ te standardna ortonormirana baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Znamo da je volumen jedinične ćelije $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$. Vektori baze B mogu se zapisati svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi: $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3]$. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \det A.$$

Iz svojstava determinanti znamo da je $\det(A\,A^t) = \det A \cdot \det A^t = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = V^2$. No,

$$A\,A^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix}.$$

Budući da su koordinate $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3]$ dane s obzirom na ortonormiranu bazu, posljednja matrica jednaka je matrici

$$M = \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{pmatrix},$$

te slijedi $V^2 = \det M$, odnosno

$$V = \sqrt{\det M}.$$

Matrica M naziva se metričkim tenzorom baze B te se osim za izračunavanje volumena jedinične ćelije može iskoristiti i za računanje skalarnog produkta dvaju vektora zadanim koordinatama u bazi B:

$$[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = (x\ y\ z) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$