Kvalifikacijski zadatak iz Matematike 2 za kemičare (riješeni primjer)

(ak. g. 2011./2012.)

Mladi teorijski matematičar™ izmislio je definiciju[1]

$$\heartsuit = \frac{\partial y}{\partial x_2}.$$

Iz nje je izveo sljedeću jednadžbu:

$$\heartsuit = x_1 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} - x_3.$$

Naš mladi teorijski matematičar™ uspio je izgubiti svoje papire s izvodom, ali se sjeća da je u izvodu koristio formule $\mathrm{d}y = \omega_1 + \omega_2$, $\mathrm{d}z = \omega_2/x_1$, $\omega_1 = -x_3\mathrm{d}x_2$ (koje je sam izmislio) te da je uveo dodatnu funkciju $\clubsuit = y - x_1 z$. Također, kao i svaki mladi matematičar, znao je lančano pravilo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x}.$$

Kako biste položili Matematiku 2, Vaš[2] je zadatak što preglednije i matematički korektnije iz definicije $\heartsuit$ izvesti jednadžbu $\heartsuit = x_1 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} - x_3$! Isti taj mladi teorijski matematičar™ korištenjem jednadžbe $\heartsuit = x_1 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} - x_3$ u slučaju kad je x_3 proporcionalno s x_1/x_2 skicirao je dijagram koji bi trebao prikazivati (kvalitativnu) ovisnost y (čiju jedinicu je nazvao €) o x_2 (čiju jedinicu je nazvao £) za slučaj kad je x_1 konstantan. Skicirajte dijagram kakvog smatrate da je nacrtao mladi teorijski matematičar™!

Rješenje.

Iz definicija ω_1 i ω_2 slijedi

$$\mathrm{d}y = -x_3\mathrm{d}x_2 + x_1\mathrm{d}z.$$

Kako je to egzaktan diferencijal, po njegovoj definiciji slijedi

$$x_3 = \frac{\partial y}{\partial x_2},\ x_1 = \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Nadalje,

$$\mathrm{d}\clubsuit = \mathrm{d}y - x_1\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x_1 = -x_3\mathrm{d}x_2 - z\mathrm{d}x_1$$

je isto egzaktan pa po Eulerovom kriteriju egzaktnosti mora vrijediti

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2}.$$

Lančano pravilo primijenjeno na definiciju $\heartsuit$, uz promjenu varijabli s x_1 i x_2 na z i x_2, daje

$$\heartsuit = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2},$$

te uvrštavanje gornjih triju izvedenih formula daje traženi izraz za $\heartsuit$.

Ako je $\heartsuit$ proporcionalan s x_1/x_2, tj. $\heartsuit = kx_1/x_2$, slijedi da je

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{k}{x_2},$$

što uvrštavanjem u $\heartsuit = x_1 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} - x_3$ daje

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \heartsuit = x_3 - x_3 = 0,$$

dakle kad je x_1 konstantan, y konstantno ovisi o x_2, tj. dijagram bi se trebao sastojati od horizontalne linije u $(x_2/\$, y/€)$-koordinantom sustavu.

[1] Sva slova označavaju veličine koje možda imaju, a možda i nemaju fizikalne jedinice, ali su sve veličine varijabilne, odnosno svaka se veličina može smatrati diferencijabilnom funkcijom ovisnom o prikladnim varijablama. Ukoliko nije drugačije rečeno kao varijable o kojima ovise sve ostale varijabilne veličine uzimamo x_1 i x_2.

[2] Pretpostavljamo da, kao i mladi teorijski matematičar™, diferencijale označene s $\mathrm{d}\diamondsuit$ smatrate egzaktnima i da znate što to znači i kako to provjeriti, te da oznake $\omega_\spadesuit$ uzimate kao oznake neegzaktnih diferencijala.