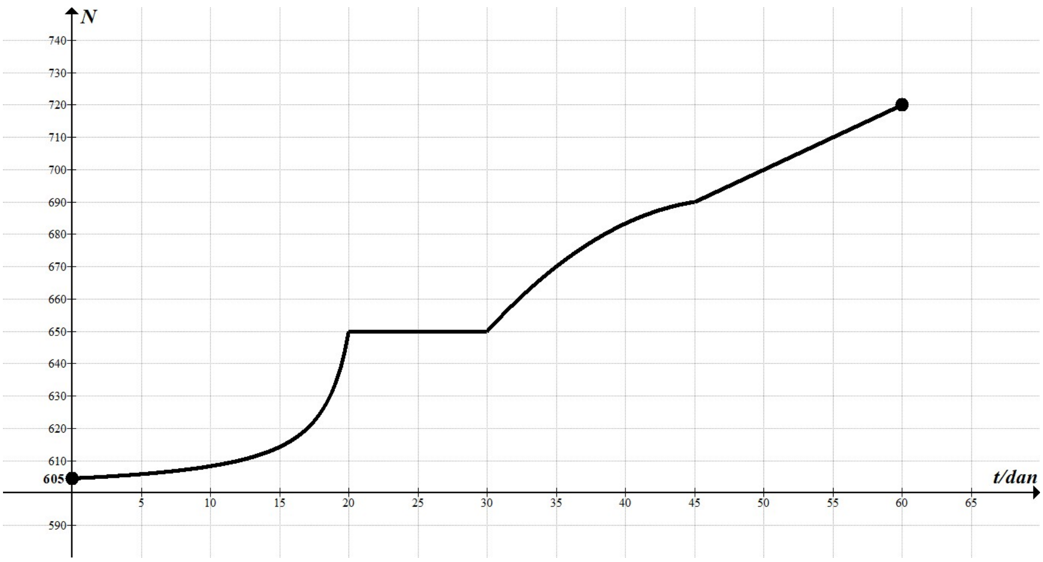
Na slici je prikazan graf ovisnosti brojnosti N članova neke *Facebook*-grupe o vremenu t kroz posljednjih 60 dana. Za potrebe ovog zadatka smatra se mogućim da N poprima i ne-cijele vrijednosti (osim u konačnim zaključcima, u kojima se izračunate ili očitane vrijednosti N zaokružuju na najbliži cijeli broj).

1. Bez osmišljavanja formule ovisnosti $N(t)$ za $0 \leq \frac{t}{\text{dan}} \leq 60$, skicirajte grafove od $\dot{N}(t)$ i od $\displaystyle\int_0^t N(\tau)\mathrm{d}\tau$ te procijenite prosječni broj $\overline{N}$ članova grupe u posljednjih 60 dana.

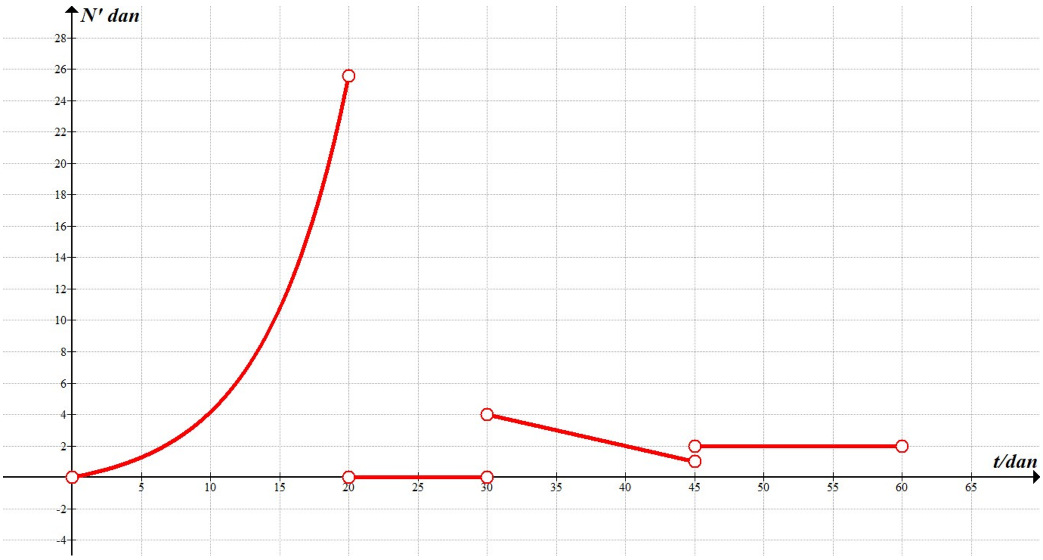
2. Osmislite formulu ovisnosti $N(t)$. Argumentirajte svoj odabir. Iskoristite svoj odabir formule za izračunavanje $\overline{N}$ i usporedite s vrijednošću dobivenom u (a) dijelu zadatka. Koju smatrate točnijom i zašto?



Budući da je N čisti broj, a t vrijeme u danima, jedinica od $\dot{N}$ je dan^{-1}, odnosno oznaka y-osi za graf od $\dot{N}$ je $\dot{N}\,\text{dan}$. Analogno je jedinica funkcije $n(t) = \displaystyle\int_0^t N(\tau)\mathrm{d}\tau$ umnožak jedinica od N i t, dakle dan, pa je za graf od n oznaka y-osi n/dan.

Nadalje, sa slike je vidljivo da je domena od N jednaka $[0, 60]$ (odnosi se na $x = t/\text{dan}$) i derivacija $\dot{N}$ ne postoji za $x = 0,\ 20,\ 30,\ 45,\ 65$. Za $0 < x < 20$ N je konveksna i raste, dakle je na tom intervalu $\dot{N}$ pozitivna i rastuća. Za $20 < x < 30$ je N konstantna, dakle je na tom intervalu $\dot{N}$ jednaka 0. Za $30 < x < 45$ je N konkavna i rastuća, dakle je $\dot{N}$ pozitivna i padajuća. Za $45 < x < 60$ je N rastuća afina, dakle je na tom intervalu $\dot{N}$ pozitivna konstanta a. Sa slike je vidljivo da je taj $a = \frac{30}{15} = 2$. Pritom vidimo da je nagib od N na dijelu desno od $x = 45$ nešto veći od nagiba tangenti malo lijevo od $x = 45$, dakle će $\lim_{x\to 45-} \dot{N}$ biti nešto manji od 2. Također, sa slike je vidljivo da se zdesna prema 0 nagibi tangenti približavaju nuli, tj. $\lim_{x\to 0+} \dot{N} = 0$. Slično se iz zadanog grafa vidi da je lijeva tangenta oko $x = 20$ nagiba približno $50/2 = 25$, pa je $\lim_{x\to 20-} \dot{N} \approx 25$. Ako bismo pak ucrtali lijevu tangentu oko $x = 45$ mogli bismo njen nagib procijeniti na otprilike $10/10 = 1$, odnosno $\lim_{x\to 45-} \dot{N} \approx 1$, a nagib tangente zdesna blizu $x = 30$ je oko $20/5 = 4$, dakle $\lim_{x\to 30+} \dot{N} = 4$.

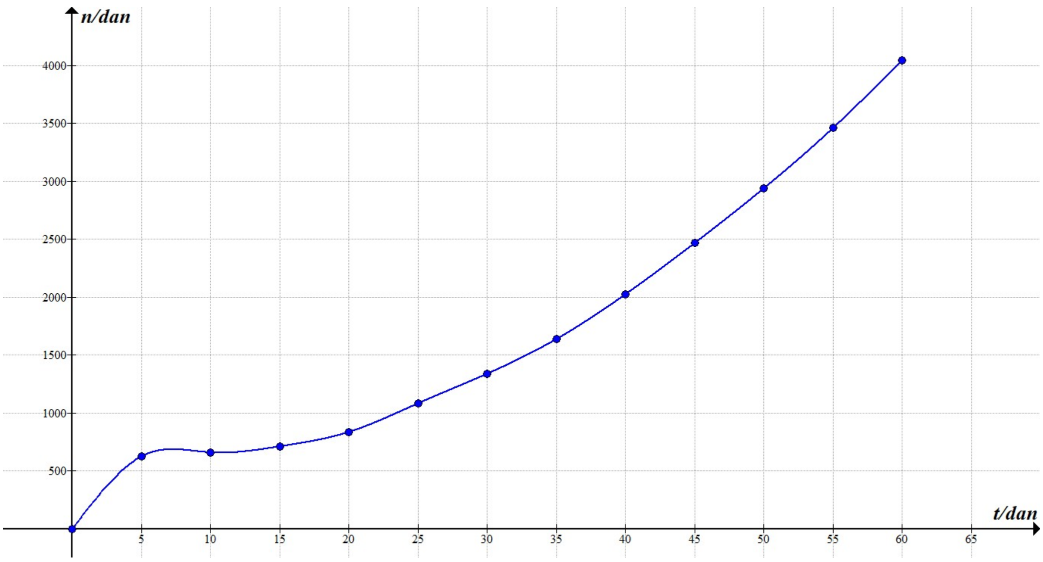
Jedan mogući graf tog tipa je dan sljedećom slikom (napomena: za prvi dio znamo samo da raste od 0 prema otprilike 25, ali ne i kako, a za treći dio samo znamo da pada prema vrijednosti otprilike 1):



Funkcija $n(t)$ opisuje površinu između grafa od N i x-osi, od 0 do t. Stoga je očito $n(0) = 0$, n rastuća i pozitivna (i definirana na čitavoj domeni $[0, 60]$). Precizno crtanje nije moguće, ali se temeljem ucrtane mreže (jedan pravokutnik ima površinu 50) mogu procijeniti iznosi $n(t) - 600$ (uočite da je horizontalna os pozicionirana na ordinati 600) za $t = 5, 10, 15, \ldots, 60$ redom na 25, $25 + 30 = 55$, $55 + 55 = 110$, $110 + 125 = 235$, $235 + 250 = 485$, $485 + 250 = 735$, $735 + 300 = 1035$, $1035 + 390 = 1425$, $1425 + 440 = 1865$, $1865 + 475 = 2340$, $2340 + 525 = 2865$, $2865 + 575 = 3440$. Posljedično je

$$\overline{N} = \frac{1}{60\,\mathrm{dan}} n(60) \approx \frac{3440 + 600 \cdot 60}{60\,\mathrm{dan}} \approx 657\,\mathrm{dan}^{-1},$$

a graf od n bi izgledao otprilike kao na slici



Napomena: Naravno da ovisno o individualnoj procjeni površina i broju trenutaka t u kojima se procjenjuje $n(t)$ konačni rezultat varira, ali bitno je da se vidi da procjena $\overline{N}$ *nije* dobivena kao prosjek početne i konačne vrijednosti, nego kao procjena površine podijeljene s rasponom nezavisne varijable, tj. kao $n(60)/(60\,\mathrm{dan})$.

Naposlijetku, N očito nije elementarna funkcija, nego funkcija zadana po dijelovima:

$$N(t) = \begin{cases} N_1(t), & 0 \leq t < 20\,\mathrm{dan}; \\ 650, & 20\,\mathrm{dan} \leq t \leq 30\,\mathrm{dan}; \\ N_3(t), & 30\,\mathrm{dan} < t < 45\,\mathrm{dan}; \\ 600 + 2t/\mathrm{dan}, & 45\,\mathrm{dan} \leq t \leq 60\,\mathrm{dan}; \end{cases}$$

Graf od N_1 podsjeća na transformiranu eksponencijalnu funkciju tipa $605\exp(at)$, pa bi se a mogao odrediti iz uvjeta $605\exp(20a) = 650$, alternativno je moguće dobiti N_1 neku drugu transformiranu elementarnu funkciju (prihvatljive su sve opcije za koje se dobije konveksni rastući N_1 u rasponu varijable od 0 do 20 s $N_1(0) = 605$ i $N_1(20) = 650$). Za N_3 analogno: Prihvatljiva je bilo koja elementarna funkcija N_3 koja je rastuća i konkavna od 30 do 45 i za koju je $N(30) = 650$ i $N(45) = 690$. Nakon tog se može izračunati

$$\overline{N} = \frac{1}{60\,\mathrm{dan}}\left(\int_0^{20} N_1(t)\mathrm{d}t + 10\cdot 650 + \int_{30}^{45} N_3(t)\mathrm{d}t + 690\cdot 15 + \frac{1}{2}15\cdot 30\right).$$

Koja procjena $\overline{N}$ je bolja u osnovi ovisi o podudaranju formule za N s grafom (u dijelovima N_1 i N_3 će, osim ako se uzme više od po dvije kontrolne točke (i/ili uzmu u obziri nagibi tangenti), vjerojatno biti bitnih odstupanja od grafa, ali to ovisi o odabiru N_1 i N_3) i o broju točaka koje smo koristili u (a) dijelu za crtanje grafa od n (tj. za procjenjivanje površina). S obzirom na to da zbog ograničenog vremena i nepreciznosti same izvorne slike vjerojatno imamo pogreške u oba tipa procjene, realistično je reći da su podjednako pouzdane (kao što rekoh, osim ako smo se za jednu potrudili dobiti podudaranje u puno više točaka).