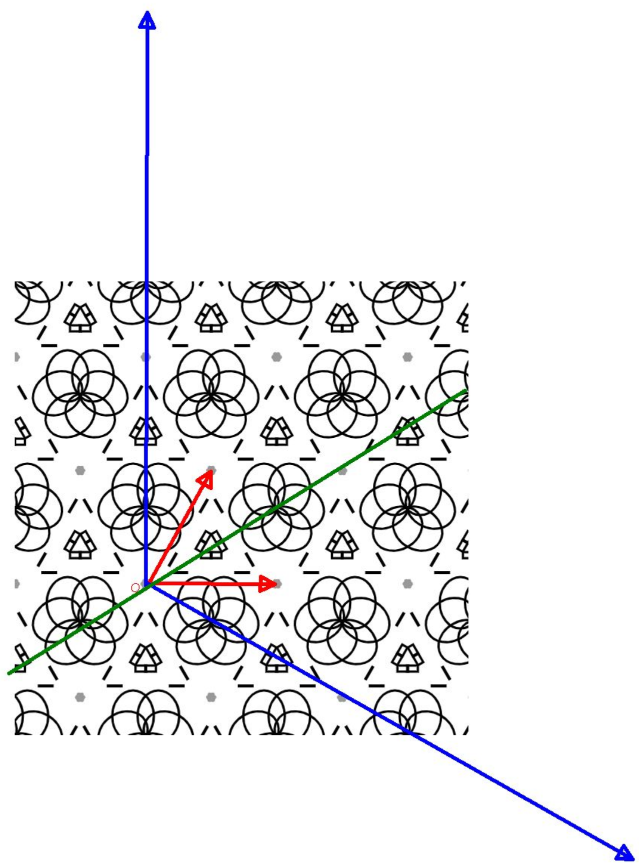
Rješenje 5. zadatka s pismenog ispita iz Matematike 1 od 20. 4. 2022.

Na slici dolje je prikazan isječak iz jedne tapete, tj. dvodimenzionalne kristalne strukture. Podrazumijeva se da se tapeta nastavlja po istom uzorku kroz čitavu ravninu. Na slici su kao sivi „cvjetići"/šesterokuti istaknute točke pripadne rešetke (naravno, samo onog dijela rešetke koji se nalazi unutar slike). U pravoj veličini razmak između svake dvije najbliže točke rešetke iznosi 0,5 cm.



Budući da su svi sivi „cvjetići" jednako udaljeni, zaključujemo da po tri susjedna čine vrhove jednakostraničnih trokuta.

U sliku ucrtajte ishodište O i bazu ravnine $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ tako da sve te točke imaju cjelobrojne koordinate i da nikoja druga točka ravnine osim njih nema cjelobrojne koordinate.

Jedna opcija odabira $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ prikazana je crveno u slici. Odabir nije jedinstven, ali da se osigura uvjet da sve istaknute točke (cvjetići) imaju cjelobrojne koordinate i da nema drugih takvih, dakle da to budu točke rešetke, ishodište mora biti u jednom od cvjetića, a vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moraju O spajati s po jednim od susjednih cvjetića.

U nastavku zadatka sve koordinate odnose se na Vašu odabranu bazu.

(a) (3) Koliko iznose parametri baze a, b i $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$? U svim korektnim odabirima, opisanim gore, $a = b = 0{,}5$ cm. Kut γ ovisno o konkretnom odabiru, ali zbog toga što po tri cvjetića čine jednakostranični trokut, može biti ili 60° (tako je na slici) ili 120°.

(b) (6) Izračunajte kut između vektora $\vec{v} = [-1, 2]$ i $\vec{w} = [1, 1]$. Ovdje je dan opći postupak, a rješenje je do kraja izračunato za $\gamma = 60°$:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (-\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b}) = a^2 + 4b^2 - 4ab\cos\gamma = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}^2;$$

$$w^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}^2;$$

$$v = w = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm};$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -a^2 + 2b^2 + ab\cos\gamma = \frac{3}{8}\,\mathrm{cm}^2;$$

$$\cos\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v\,w} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(\vec{v}, \vec{w}) = 60°.$$

(c) (6) Ucrtajte „recipročnu” bazu, tj. bazu $\{\vec{a^*}, \vec{b^*}\}$ sa svojstvom da je $\vec{a^*} \cdot \vec{b} = \vec{a^*} \cdot \vec{b} = 0$ i $\vec{a^*} \cdot \vec{a} = \vec{b^*} \cdot \vec{b} = 1\,\mathrm{cm}^2$. Zbog prva dva uvjeta, $\vec{a^*}$ je okomit na $\vec{b}$, a $\vec{b^*}$ je okomit na $\vec{a}$. Zbog svojstava direktne baze iz a) dijela zadatka, slijedi da $\vec{a^*}$ s $\vec{a}$ i analogno $\vec{b^*}$ s $\vec{b}$ tvori ili kut od 30° ili 150°, dakle je kosinus kuta između $\vec{a^*}$ s $\vec{a}$ i analogno $\vec{b^*}$ s $\vec{b}$ jednak $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Stoga je

$$1\,\mathrm{cm2} = \vec{a^*} \cdot \vec{a} = \pm|\vec{a^*}|\,a\,\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{a^*}| = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm} \approx 2{,}3\,\mathrm{cm}$$

i očito je pravilni predznak kosinusa bio +, dakle je kut između $\vec{a^*}$ s $\vec{a}$ jednak 30°. Identičan postupak daje isti zaključak za $\vec{b^*}$ (duljina $\frac{4}{\sqrt{3}}$ cm i kut 30° prema $\vec{b}$). Dakle, $\{\vec{a^*}, \vec{b^*}\}$ za naš odabir izgleda otprilike kao što je na slici ucrtano plavo.

(d) (5) Ucrtajte geometrijsko mjesto, tj. skup svih točaka za čije koordinate (x, y) vrijedi $(\vec{a}^* - \vec{b}^*) \cdot [x, y] = 0$.

$$0 = (\vec{a}^* - \vec{b}^*) \cdot [x, y] = (\vec{a}^* - \vec{b}^*) \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) = (\mathrm{c-dio}) = (x - y)\,1\,\mathrm{cm}^2,$$

dakle se radi o pravcu $y = x$ u na početku odabranom koordinatnom sustavu, tj. traženo geometrijsko mjesto je skup svih točaka s jednakom apscisom i ordinatom, dakle simetrala polaznih baznih vektora (zeleno na slici).