

RJEŠAVANJE PROBLEMA POMOĆU GRAFOVA

Goranka Nogo

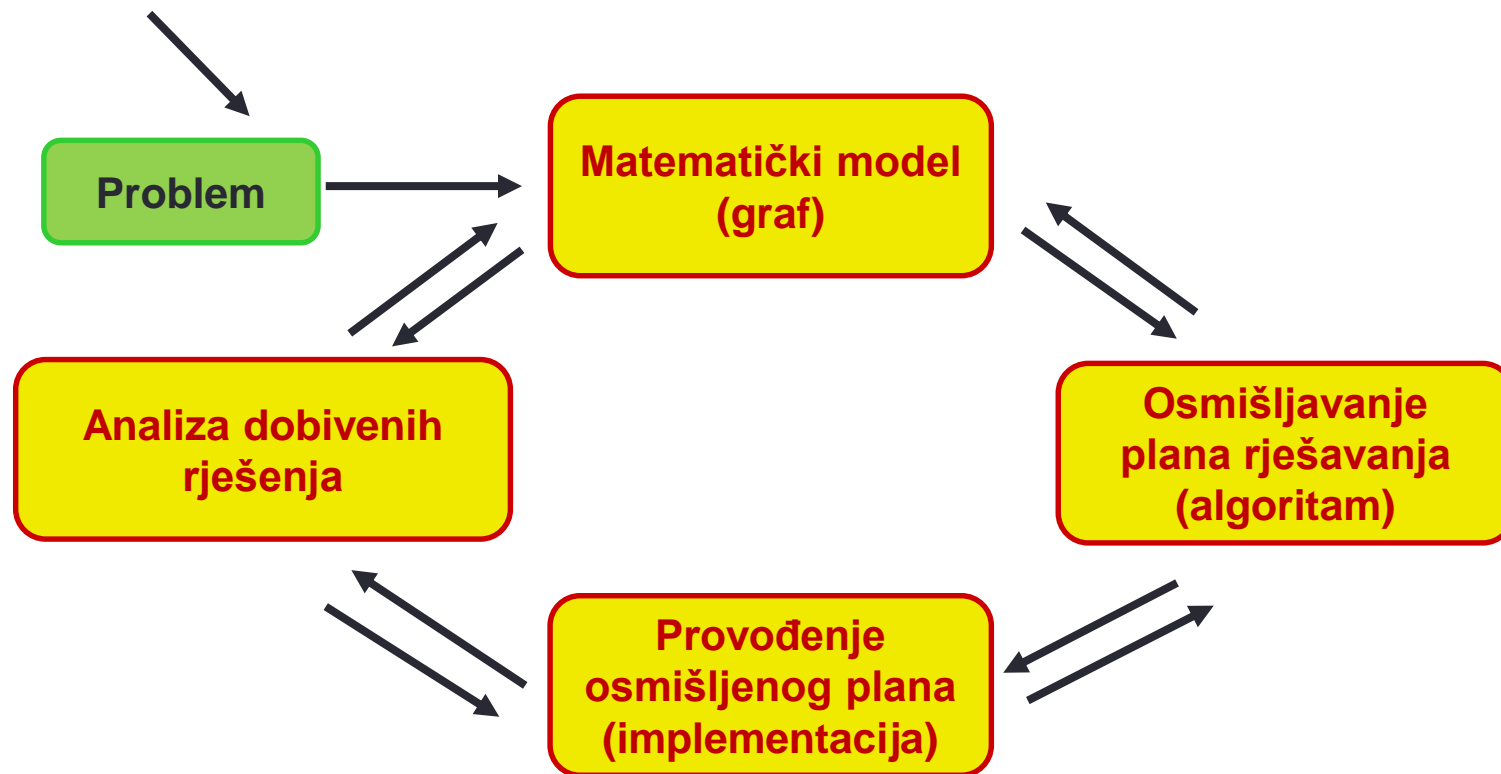
PMF, Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj

- Zašto grafovi
- Osnovni pojmovi
- Prikaz grafa
- Algoritmi na grafovima
- Primjeri zadatka
- Literatura

Zašto grafovi

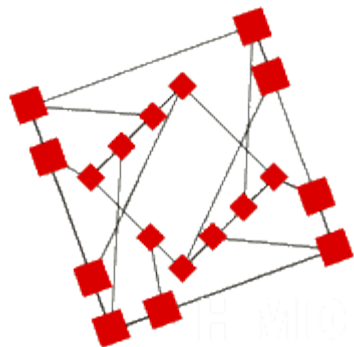
- Etape prilikom rješavanja problema:



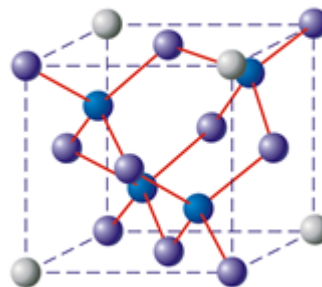
Zašto grafovi

- Mnoge se pojave modeliraju dijagramima koji se sastoje od točaka i njihovih spojnica:
 - računalne mreže
 - društvene mreže
 - transportne mreže
 - električne mreže
 - proces razvoja softvera
 - postupak rješavanja nekog problema
 - evolucijska stabla
 - ...
- „Vizualizira i grafički prikazuje koji realan problem.”

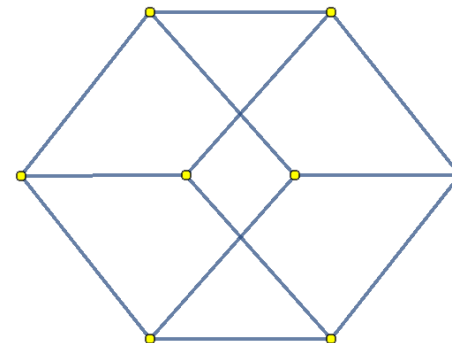
Zašto grafovi



[1]

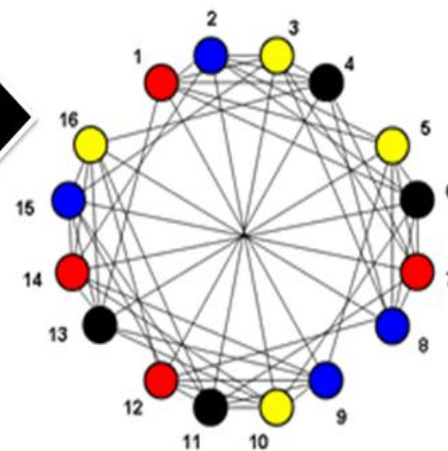


[2]



Primjer modela:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

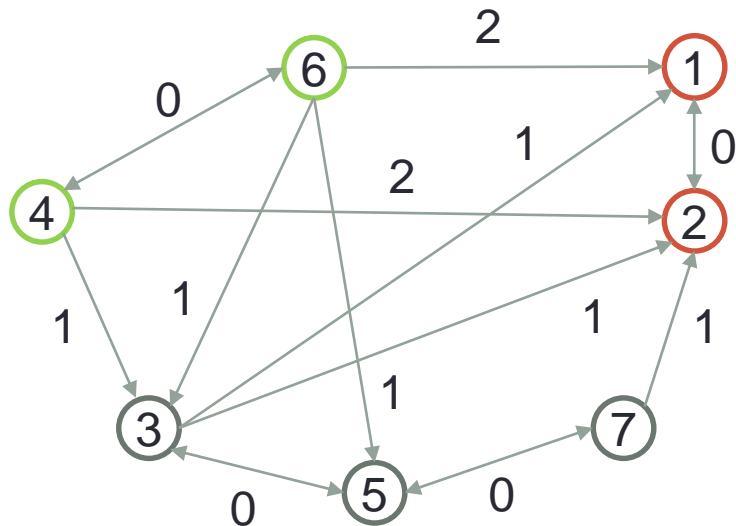


[3]

Zašto grafovi

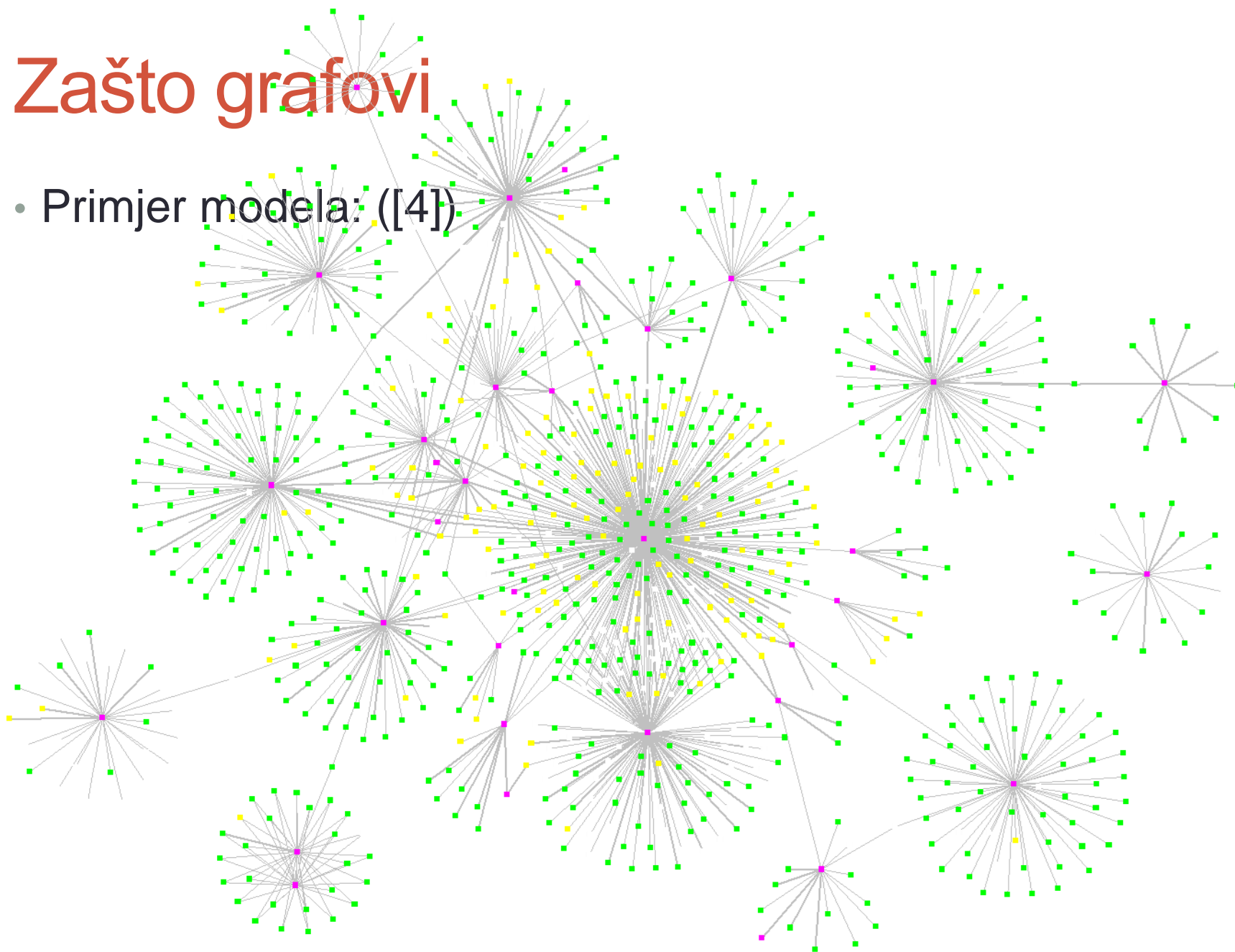
- Primjer modela (nisu nacrtani svi bridovi):

1	2	3	4	5	6	7
3	3	2	1	2	1	2



Zašto grafovi

- Primjer modela: ([4])



Zašto grafovi

- Problem:
 - uočiti da se zadani problem može modelirati grafom.
- Dobar putokaz:
 - pojavljivanje riječi put, udaljenost, brid, ... u opisu problema.
- Primjer: pomozimo Luki da u minimalnom broju koraka dođe do kuće (korak – pomak za jedan, horizontalno ili vertikalno, X – prepreka)

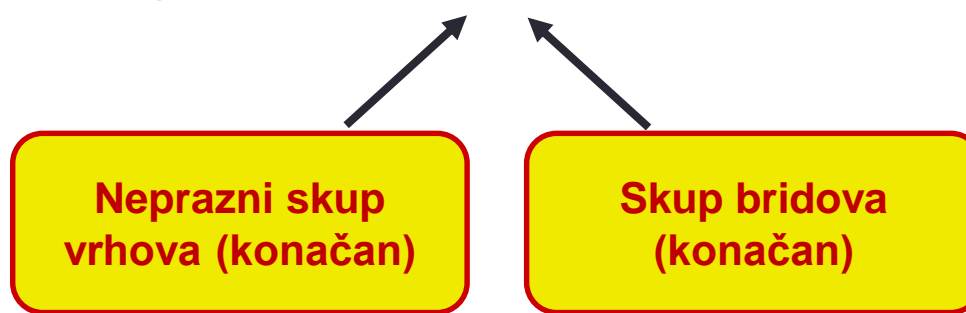
```

. . . X . . L
. X . X . X X
. . . . . .
. K . X . . .
. . . . . X .

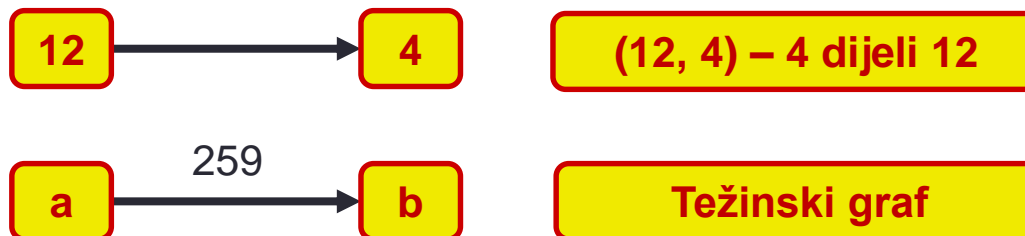
```


Osnovni pojmovi

- Usmjereni graf: $G = (V, E)$

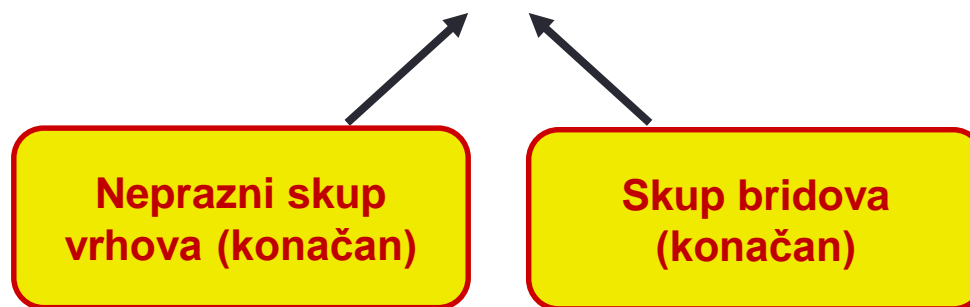


- $E \subseteq V \times V$

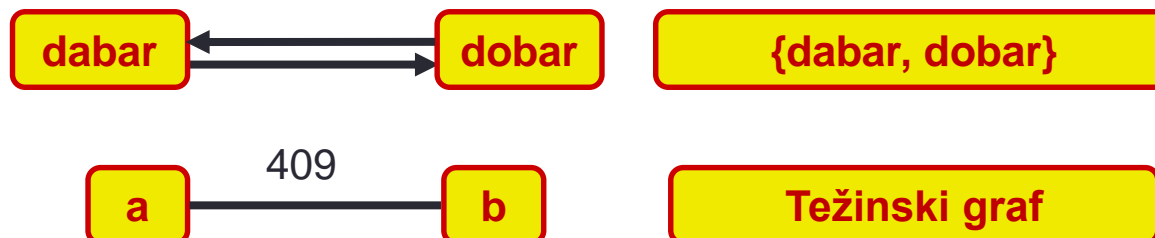


Osnovni pojmovi

- Neusmjereni graf: $G = (V, E)$



- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \dots\}$



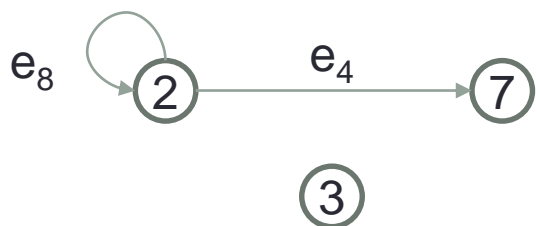
Osnovni pojmovi

- Težinska funkcija najčešće poprima
 - pozitivne i (ili)
 - cjelobrojne vrijednosti.

Prikaz grafa

- Matrični prikaz:

- matrica incidencije ($|V| \times |E|$, $M(G)=[m_{ij}]$, m_{ij} je broj (0,1 ili 2) koliko su puta v_i i e_j incidentni)



$$\begin{aligned} m_{24} &= 1 \\ m_{34} &= 0 \\ m_{28} &= 2 \end{aligned}$$

- matrica susjedstva ($|V| \times |V|$, $A(G)=[a_{ij}]$, a_{ij} je broj bridova koji spajaju v_i i v_j).



$$\begin{aligned} a_{27} &= 1 \\ a_{37} &= 0 \\ a_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Prikaz grafa

- Matrični prikaz:

- matrica udaljenosti ($|V| \times |V|$, $A(G)=[d_{ij}]$, d_{ij} je težina brida koji spaja v_i i v_j).



$$d_{27} = 20$$

$$d_{22} = 0$$

$$d_{37} = \textit{inf} \text{ (veliki broj)}$$

ili neki drugi indikator

nepostojanja brida,

npr. -1

- Grafovi kao testni primjerci - tekstualne datoteke:

- 2 5 20 (udaljenost između vrhova 2 i 5 je 20)

...

- 1 3 6 8 ((1,3) i (6,8) su koordinate vrhova grafa)

....

Prikaz grafa

- Prikaz pomoću lista:

- lista bridova: $[[1, 4], [1, 8], \dots, [8, 3]]$
- lista vrhova:



- ...

- Koji prikaz koristiti? Ovisi o:

- operacijama na grafu
- postojanju višestrukih bridova između dva vrha
- veličini grafa
- gustoći grafa
- ...

Algoritmi na grafovima [5]

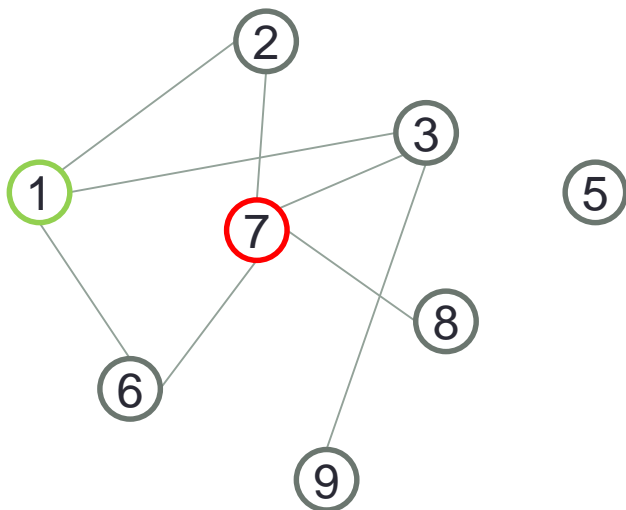
- Osnovni algoritmi na grafovima (*Elementary Graph Algorithms*):
 - Pretraživanje u dubinu (*Depth-first search*)
 - Pretraživanje u širinu (*Breadth-first search*)
 - Topološko sortiranje (*Topological sort*)
 - ...
- Minimalna razapinjuća stabla (*Minimum Spanning Trees*):
 - Kruskalov i Primov algoritam (*The algorithms of Kruskal and Prim*)
 - ...
- Najkraći put iz jednog vrha (*Single-Source Shortest Paths*):
 - Belman-Fordov algoritam (*The Bellman-Ford algorithm*)
 - Dijkstrin algoritam (*Dijkstra's algorithm*)
 - ...

Algoritmi na grafovima

- Najkraći put između svakog para vrhova (*All-Pairs Shortest Paths*):
 - Najkraći putevi i množenje matrica (*Shortest paths and matrix multiplication*)
 - Floyd-Warshallov algoritam (*The Floyd-Warshall algorithm*)
 - ...
- Maksimalni tok (*Maximum Flow*):
 - Ford-Fulkerson algoritam (*The Ford-Fulkerson method*)
 - Maksimalno sparivanje u bipartitnim grafovima (*Maximum bipartite matching*)
 - ...

Algoritmi na grafovima

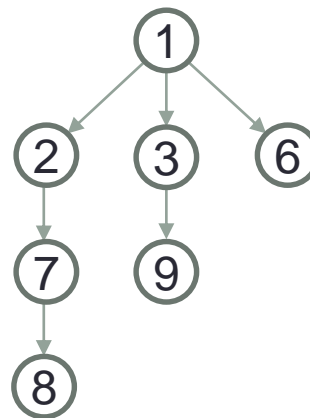
- Algoritam **Breadth First Search - BFS**:



1_0	2_1	3_1	6_1	7_2	9_2	8_3
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1_0					
1_0	2_1	3_1	6_1		
2_1	3_1	6_1	7_2		
3_1	6_1	7_2	9_2		
6_1	7_2				
7_2	9_2	8_3			
9_2	8_3				
8_3					

Algoritmi na grafovima



Primjeri zadatka

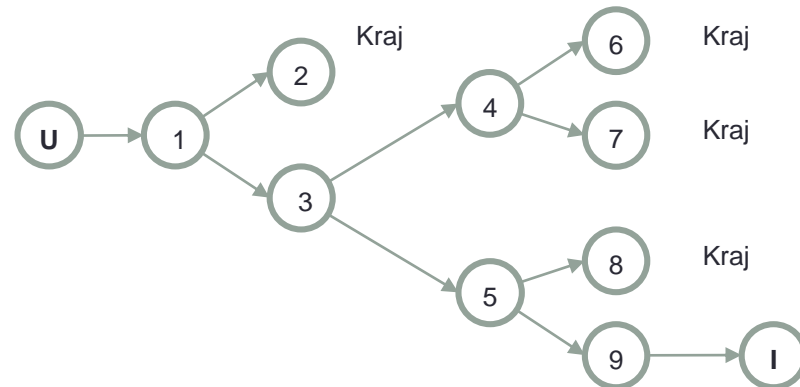
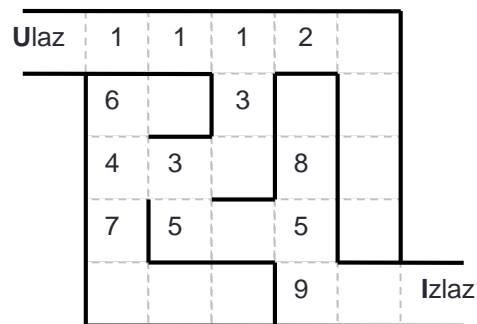
- *The Word Ladder Problem:*
 - S - konačan skup dopuštenih riječi
 - za zadane $a, b \in S$, treba pronaći niz riječi iz S koje ih povezuju
 - generiranje članova niza: promjena samo jednog slova u riječi.
- Primjer:
 - cats → mats → mate → mace → mice
 - kosa → kola → kota → kuta → kula → kupa → kapa.

Primjeri zadatka

- Postupak rješavanja:
 - prikazati odnose između riječi neusmjerenim grafom (prethodno možete riječima bijektivno pridružiti brojeve)
 - primijeniti neki algoritam za pronalaženje (najkraćeg) puta između dva vrha.
- Jedno moguće rješenje primjenom algoritma *BFS* možete pronaći u [6].

Primjeri zadatka

- Pronalazak puta iz labirinta (primjena poznatog algoritma pri rješavanju novih problema):



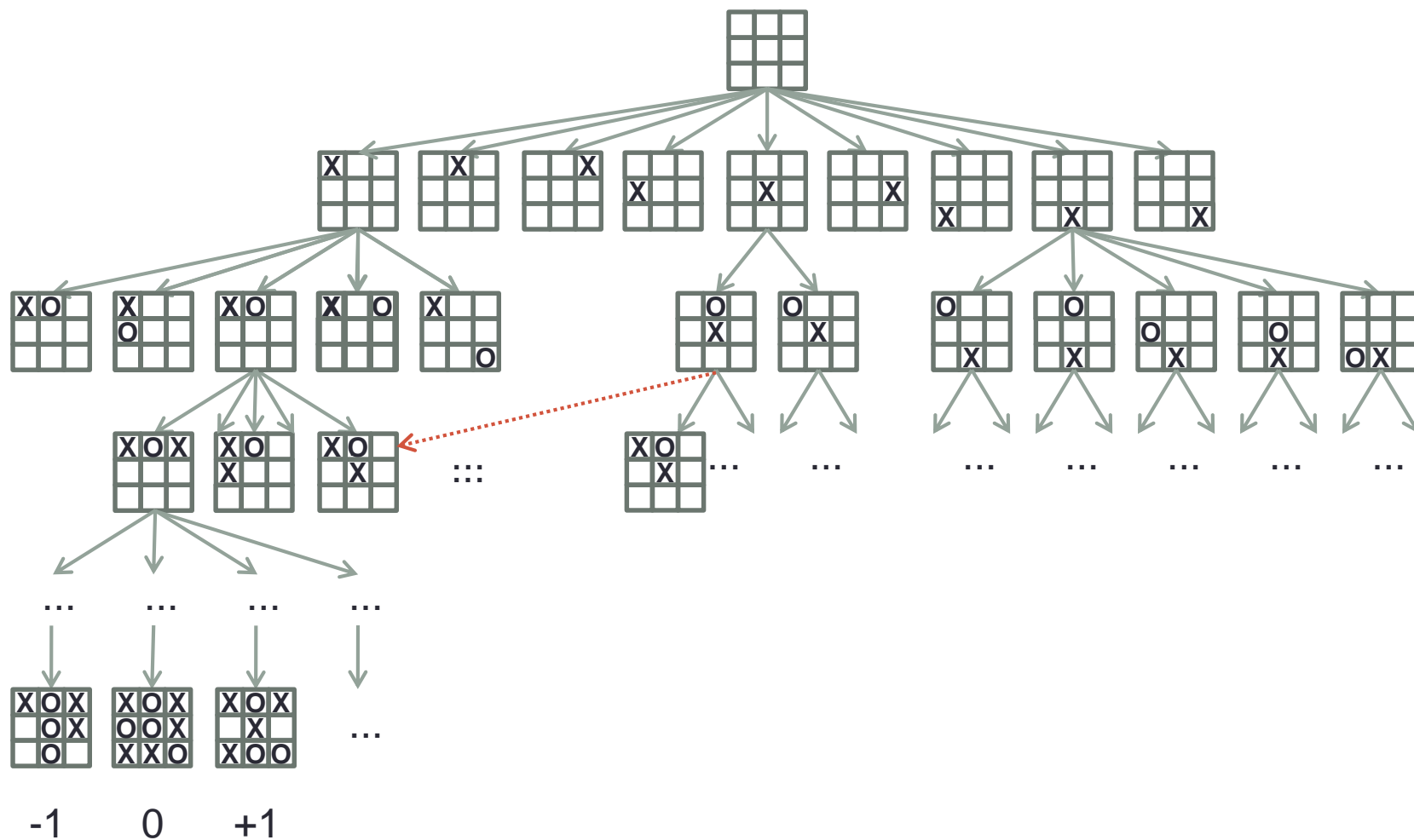
Primjeri zadataka

- Prijateljstva (vrhovi predstavljaju osobe, a incidentni su ako su osobe prijatelji):
 - ispisati sve prijatelje koji su na udaljenosti 3 od zadane osobe
 - ...
- Zajednički filmovi [7] (vrhovi predstavljaju osobe (glumce/ice), a incidentni su ako su osobe glumile u istom filmu):
 - ispisati „udaljenost” dva glumca
 - ...

Primjeri zadatka – igra Križić-kružić

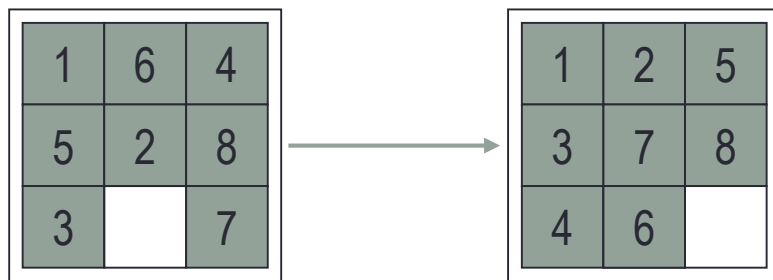
- Definicija problema:
 - početno stanje
 - prazna ploča 3×3
 - funkcija prijelaza
 - postavi X ili O u prazno polje
 - uvjet zaustavljanja
 - tri X u nizu – pobijedio prvi igrač
 - tri O u nizu – pobijedio drugi igrač
 - sva polja popunjena – neriješeno
 - funkcija korisnosti (daje numeričku vrijednost terminalnim stanjima)
 - pobjeda: 1
 - poraz: -1
 - neriješeno: 0.

Križić-kružić: dio stabla pretraživanja

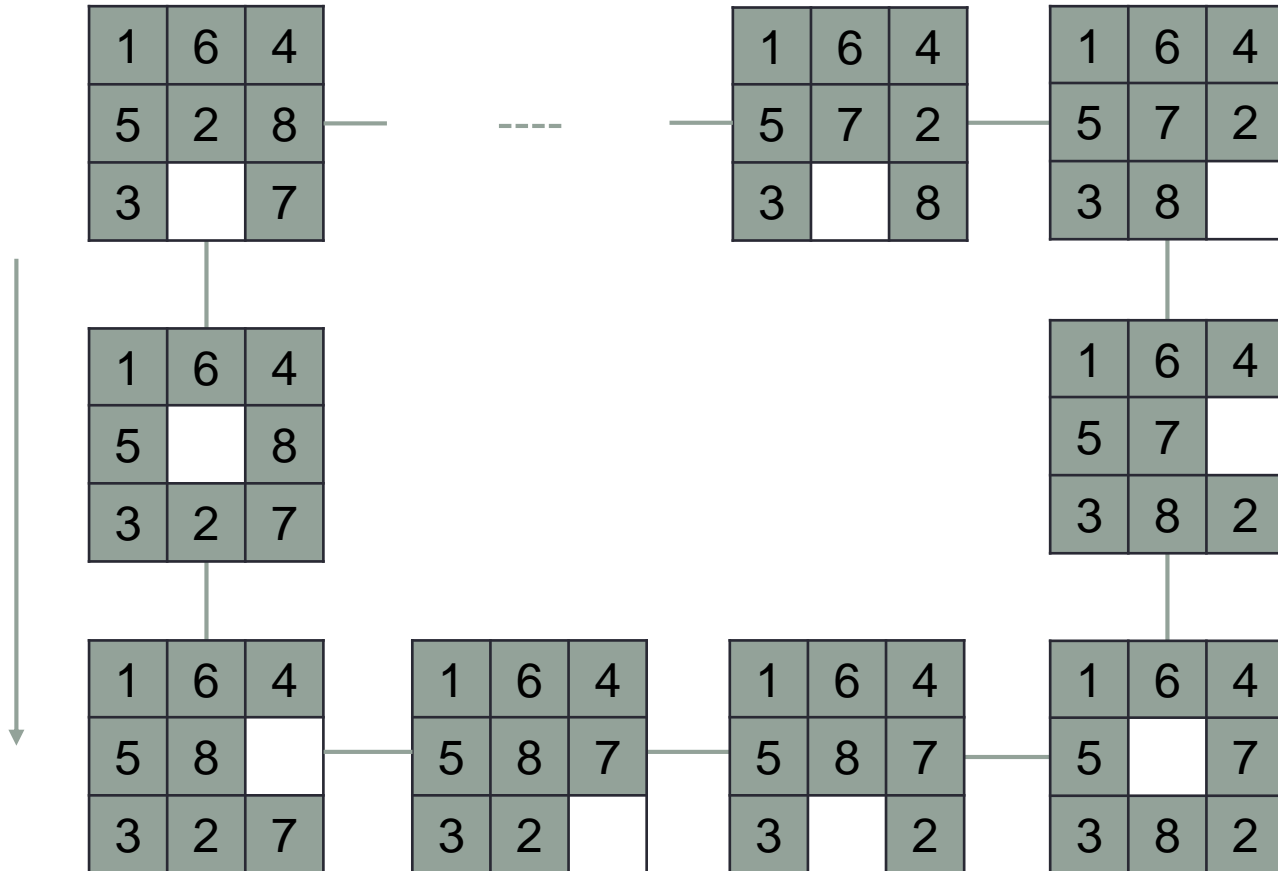


Primjeri zadatka – igra 8-puzzle

- Definicija problema:
 - pomicanjem jednog enumeriranog bloka na prazno mjesto treba od početne doći do zadane konfiguracije.



8-puzzle: dio grafa pretraživanja



Literatura

- [1] <http://www.matematika.hr/o-hmd-u/prica-o-logotipu/>
(pristupljeno 16. 3. 2021.)
- [2] https://glossary.periodni.com/preuzimanje_slike.php?name=alotropske_modifikacije_ugljika.png&source=alotrop (pristupljeno 10. 1. 2022.)
- [3] T. Bujanović, A. Paliska, F. Srnec, *Problem bojanja grafova* – projekt iz kolegija Meta-heuristike, PMF-MO, 2016.
- [4] http://www.orgnet.com/TB_web.ppt (pristupljeno 10. 1. 2022.)
- [5] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms, Third Edition*, The MIT Press, 2009
- [6] <https://runestone.academy/ns/books/published//pythonds/index.html>
(pristupljeno 10. 1. 2022.)
- [7] <https://www.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/breadth-first-search/a/breadth-first-search-and-its-uses>
(pristupljeno 10. 1. 2022.)
- [8] J. V. Guttag, *Introduction to Computation Using Python*, The MIT press, 2013