Prvi kolokvij

Za samostalno rješavanje u periodu 3. 12. 2015. – 17. 12. 2015.

1. Neka je $\mathcal{P}_1$ tzv. *eliptički pramen kružnica*, definiran kao skup svih kružnica koje prolaze kroz točke $(-1,0)$ i $(1,0)$, a $\mathcal{P}_2$ tzv. *hiperbolički pramen kružnica*, koji se sastoji od svih kružnica dobivenih kao geometrijska mjesta točaka ravnine s fiksnim omjerom udaljenosti od točaka $(-1,0)$ i $(1,0)$.

   (a) Nađite holomorfnu funkciju $f\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ takvu da $\mathcal{P}_1$ čini nivo-skupove od $\mathrm{Re}f$, a $\mathcal{P}_2$ čini nivo-skupove od $\mathrm{Im}f$.

   (b) Zaključite da su dva spomenuta pramena kružnica ortogonalno spregnuti, tj. svaka kružnica iz prvog pramena siječe pod pravim kutom svaku kružnicu iz drugog pramena. Razmislite i o elementarnom dokazu te tvrdnje.

2. Za funkciju $u\colon \mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}$ kažemo da je *harmonijska* ako za svaku točku $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ vrijedi

$$u(i,j)=\frac{1}{4}\Big(u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)\Big).$$

   Pokažite da svaka omeđena harmonijska funkcija na $\mathbb{Z}^2$ mora biti konstanta. Vrijedi li isto i za svaku nenegativnu harmonijsku funkciju na $\mathbb{Z}^2$?

3. Pretpostavimo da je B Banachov prostor (s normom $\|\cdot\|_B$) takav da je $B\subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i da trigonometrijski polinomi čine gusti potprostor od B. Označimo sa $S_N f$ parcijalne sume Fourierovog reda funkcije f, tj.

$$(S_N f)(x) := \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{2\pi i n x}, \qquad \text{za } x\in\mathbb{T},\ N\in\mathbb{N}_0.$$

   Pretpostavimo da postoje $0<q<\infty$ i $C>0$ takvi da za svaku $f\in B$ i svaki $\alpha>0$ vrijedi

$$\lambda\Big(\big\{x\in\mathbb{T}\,:\,\sup_{N\in\mathbb{N}_0}|(S_N f)(x)-f(x)|>\alpha\big\}\Big)\ \le\ \left(\frac{C\|f\|_B}{\alpha}\right)^q,$$

   pri čemu λ označava Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{T}$. Pokažite da za svaku $f\in B$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty}(S_N f)(x)=f(x) \qquad \text{za } \lambda\text{-skoro svaki } x\in\mathbb{T}.$$

4. Neka je H separabilan Hilbertov prostor i Z neprazan zatvoren i konveksan skup u njemu. Ako je $f\colon\mathbb{R}\to Z$ izmjeriva funkcija takva da je $x\mapsto\|f(x)\|_H$ integrabilna te ako je $\varphi\colon\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ izmjeriva funkcija takva da je $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=1$, dokažite da funkcija $\varphi*f$ također mora poprimati vrijednosti u skupu Z. Pritom je *konvolucija* funkcija φ i f na $\mathbb{R}$ definirana sa

$$(\varphi*f)(x):=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-t)f(t)dt,$$

a integral vektorske funkcije $g\colon \mathbb{R} \to H$ takve da je $\int_{\mathbb{R}} \|g(x)\|_H dx < +\infty$ (za kojeg smijete pretpostaviti da postoji) je jedinstveni vektor $v \in H$ takav da za svaki vektor $w \in H$ vrijedi

$$\langle v, w\rangle_H = \int_{\mathbb{R}} \langle f(x), w\rangle_H dx.$$

5. Označimo $\mathbb{W} := [0, \infty\rangle$ te definirajmo na $\mathbb{W}$ dvije binarne operacije $\oplus$ i $\otimes$ na sljedeći način. Uzmimo proizvoljne $x, y \in \mathbb{W}$ te ih zapišimo u binarnoj bazi:

$$\begin{array}{rcccll} x & = & \ldots a_{-2}a_{-1}a_0.a_1a_2a_3a_4\ldots & = & \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j 2^{-j}, & a_j \in \{0,1\}, \\ y & = & \ldots b_{-2}b_{-1}b_0.b_1b_2b_3b_4\ldots & = & \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j 2^{-j}, & b_j \in \{0,1\}. \end{array}$$

Radi jednoznačnosti zapisa ne dozvoljavamo prikaze koji od nekog mjesta nadesno imaju samo jedinice. Konačno definiramo

$$\begin{array}{rcl} x \oplus y & := & \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big(a_j + b_j \bmod 2\big)\, 2^{-j}, \\ x \otimes y & := & \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k}b_k \bmod 2\big)\, 2^{-j}. \end{array}$$

(a) Pokažite da $(\mathbb{W}, \oplus, \otimes)$ zadovoljava aksiome polja izvan skupa mjere 0. To je takozvani *dijadski ili Walshov model realnih brojeva.*

(b) Definirajmo funkciju $E\colon \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ formulom $E(x) := (-1)^{a_1}$, pri čemu x ima gornji binarni prikaz. Dokažite da vrijedi

$$E(x \oplus y) = E(x)E(x) \qquad \text{za svake } x, y \in \mathbb{W}.$$

Zbog tog svojstva se $E(x)$ može shvatiti kao dijadski analogon eksponencijalne funkcije $e^{2\pi i x}$. Skicirajte graf funkcije E. Ponekad se E zove *kvadratični sinus*, iz sada očiglednih razloga.

(c) *Walsh-Fourierova transformacija* funkcije $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{W})$ je definirana kao

$$\hat{f}(\xi) := \int_0^\infty f(x)E(x \otimes \xi)dx.$$

Ako $\mathbf{1}_I$ označava karakterističnu funkciju dijadskog intervala $I = [2^{-k}\ell, 2^{-k}(\ell+1)\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, pokažite da je

$$\widehat{\mathbf{1}}_I(\xi) = 2^{-k}\mathbf{1}_{[0,2^k\rangle}(\xi)E(2^{-k}\ell \otimes \xi).$$

(d) Ako je funkcija f konstantna na dijadskim intervalima duljine 2^{-k} i iščezava izvan intervala $[0, 2^k\rangle$ za neki $k \in \mathbb{N}$, dokažite da tada i njena Walsh-Fourierova transformacija $\hat{f}$ ima to isto svojstvo. Takve funkcije se zovu *dijadske step-funkcije* i predstavljaju dijadski analogon Schwartzovog prostora.

(e) Pronađite funkciju $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{W})$ takvu da je $\hat{f} = f$ i koja nije identički jednaka 0.

Vjekoslav Kovač