Drugi kolokvij

Za samostalno rješavanje do 16. 2. 2018.

1. Neka je K antisimetrična standardna jezgra, tj. pretpostavimo da osim (K1)–(K3) vrijedi i $K(y,x) = -K(x,y)$ za svake $x,y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$. Dokažite da je formulom

$$\Lambda(f,g) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}\,:\,|x-y|\geq\varepsilon\}} K(x,y)f(y)g(x)\,dxdy$$

dobro definirana bilinearna forma $\Lambda\colon \mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)\times\mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$ te da je štoviše

$$\Lambda(f,g) = \frac{1}{2}\int\limits_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}\,:\,x\neq y\}} K(x,y)\big(f(y)g(x)-f(x)g(y)\big)\,dxdy.$$

za svake $f,g\in\mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)$. (Primijetimo da ovdje ne pretpostavljamo disjunktnost nosača od f i g.)

Napomena: Ništa nam ne garatira da doista postoji operator $T\colon \mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)\to\mathrm{L}_{\mathrm{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ takav da vrijedi $\int_{\mathbb{R}^d}(Tf)g = \Lambda(f,g)$ za $f,g\in\mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)$, ali ako to ipak jest slučaj, tada je očigledno T Calderón-Zygmundov operator s jezgrom K i vrijedi $T^\tau = -T$.

2. Ako je $T\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\to\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ omeđeni linearni operator koji komutira s translacijama T_c, $c\in\mathbb{R}$ i dilatacijama D_a, $a>0$, dokažite da je tada $T=\alpha I+\beta H$ za neke $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

Uputa: Promotrite linearni operator $S\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\to\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definiran sa $Sg := (T\check{g})\widehat{\ }$, koji radi svojstava Fourierove transformacije komutira s modulacijama i dilatacijama. Uzmite $g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ takvu da je $\hat{g}\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ te pogodno odabranu $\varphi\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i opravdajte formalni račun

$$\begin{aligned}(g\varphi)(x) &= \Big(\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi\Big)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}}\hat{g}(\xi)(\mathrm{M}_\xi\varphi)(x)d\xi \\ \Longrightarrow\ S(g\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}}\hat{g}(\xi)S(\mathrm{M}_\xi\varphi)(x)d\xi = \int_{\mathbb{R}}\hat{g}(\xi)(\mathrm{M}_\xi S\varphi)(x)d\xi = g(x)(S\varphi)(x),\end{aligned}$$

iz kojeg zaključite da je S oblika $Sg = mg$ za neku $m\in\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Potom još iskoristite invarijantnost na dilatacije kako biste dobili da je m konstantna na $\langle-\infty,0\rangle$ i $\langle 0,+\infty\rangle$.

3. Ako je μ konačna mjera na $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, onda se Hilbertova transformacija of μ po analogiji definira kao

$$(\mathrm{H}\mu)(x) := \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\{t\in\mathbb{R}\,:\,|x-t|\geq\varepsilon\}}\frac{1}{x-t}\,d\mu(t).$$

Uzmimo različite realne točke $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i stavimo $\mu = \sum_{j=1}^n \delta_{x_j}$, tj. μ je zbroj Diracovih masa koncentriranih u navedenim točkama. Za svaki $\alpha\in\langle 0,+\infty\rangle$ dokažite jednakost

$$\big|\big\{|\mathrm{H}\mu| > \alpha\big\}\big| = \frac{2n}{\pi\alpha}.$$

4. (a) Neka je u realna harmonijska funkcija na Ω i v njezin harmonijski konjugat. Za bilo koje $a, b \in \mathbb{R}$ promotrimo *nivo-krivulje*

$$\Gamma_1 = \{z \in \Omega : u(z) = a\}, \quad \Gamma_2 = \{z \in \Omega : v(z) = b\}.$$

Pretpostavimo da su neprazne i nedegenerirane u svakoj točki, tj. $\nabla u \neq \mathbf{0}$ na Γ_1 i $\nabla v \neq \mathbf{0}$ na Γ_2. Pokažite da se u svakoj točki presjeka od Γ_1 i Γ_2 te dvije krivulje sijeku pod pravim kutom.

(b) Neka je $\mathcal{P}_1$ tzv. *eliptički pramen kružnica*, definiran kao skup svih kružnica koje prolaze kroz točke $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, a $\mathcal{P}_2$ tzv. *hiperbolički pramen kružnica*, koji se sastoji od svih kružnica dobivenih kao geometrijska mjesta točaka ravnine s fiksnim omjerom udaljenosti od točaka $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.

Nađite holomorfnu funkciju $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takvu da $\mathcal{P}_1$ čini nivo-skupove od $\mathrm{Re} f$, a $\mathcal{P}_2$ čini nivo-skupove od $\mathrm{Im} f$. Zaključite da su dva spomenuta pramena kružnica *ortogonalno spregnuti*, tj. svaka kružnica iz prvog pramena siječe pod pravim kutom svaku kružnicu iz drugog pramena. Razmislite i o elementarnom dokazu te tvrdnje.

5. Neka su $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$, $s > 0$ takvi da vrijedi $1/p = 1/q + s/d$.

(a) Za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ dokažite *Hedbergovu nejednakost*:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|}{|x - y|^{d-s}} dy \lesssim_{d,p,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}^{sp/d} (\mathrm{M}f)(x)^{1-sp/d}.$$

Uputa: Uočavanjem i korištenjem simetrija možemo normalizirati tako da vrijedi $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = 1$ i $(\mathrm{M}f)(x) = 1$. Rastavite područje integracije na $\{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| > 1\}$ i $\bigcup_{k=0}^{\infty} \{y \in \mathbb{R}^d : 2^{-k-1} < |x - y| \leq 2^{-k}\}$.

(b) Iskoristite (a) dio kako biste dali alternativni dokaz ocjene Rieszovog potencijala:

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x - y|^{d-s}} dy \Big\|_{\mathrm{L}^q_x(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Svaki zadatak donosi po 6 bodova.

Vjekoslav Kovač