ALG. STRUKTURE, Rješenja

Drugi kolokvij , 31. 01. 2024.

1. *Definirajmo A kao skup svih matrica oblika* $\begin{pmatrix} x & 15y \\ 9y & x \end{pmatrix}$, *gdje su $x, y \in \mathbb{Z}$. Nadalje, za proizvoljan $a \in \mathbb{N}$ definiramo S_a kao skup svih matrica oblika* $\begin{pmatrix} ax & 15y \\ 9y & ax \end{pmatrix}$, *gdje su $x, y \in \mathbb{Z}$. Je li A, uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica, prsten s jedinicom? Ako da, postoji li neki $a > 20$ takav da je pripadni skup matrica S_a pravi ideal u A?*

   Rješenje. **(4 boda)** Neka su matrice $M_i = \begin{pmatrix} x_i & 15y_i \\ 9y_i & x_i \end{pmatrix} \in A$. Očito je $M_1 - M_2 \in A$, i isto tako je produkt

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 15y_1 \\ 9y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 15y_2 \\ 9y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + 135y_1y_2 & 15(x_1y_2 + x_2y_1) \\ 9(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 + 135y_1y_2 \end{pmatrix}$$

   također iz A. Jer je očito A podskup prstena $M_2(\mathbb{Z})$, zaključujemo da je $A \leq M_2(\mathbb{Z})$, potprsten. Jasno, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jedinica prstena $M_2(\mathbb{Z})$ i ona je očito sadržana u A; i zato je A prsten s jedinicom I.

   (1 bod) Primijetimo da za gore uzete matrice imamo da je $M_1M_2 = M_2M_1$; tj., A je komutativan prsten.

   (3 boda) Primijetimo da je $S_a \subseteq A$. Nadalje, očito je $(S_a, +) \leq (A, +)$, aditivna podgrupa. Dalje, za $M = \begin{pmatrix} x & 15y \\ 9y & x \end{pmatrix} \in A$ i $T = \begin{pmatrix} au & 15w \\ 9w & au \end{pmatrix} \in S_a$ računamo:

$$TM = MT = \begin{pmatrix} axu + 135yw & 15(xw + ayu) \\ 9(xw + ayu) & axu + 135yw \end{pmatrix}.$$

   Jer je $135 = 3^3 \cdot 5$, odmah vidimo da je svaki $a \in \{27, 45, 135\}$ dobar, u smislu da je S_a ideal u A; i to očito pravi.

---

2. *Na prstenu $A = \mathbb{Z}[\sqrt{6}] = \{a + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ definiramo preslikavanje $f : A \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ s $f(a + b\sqrt{6}) = 6\overline{a} + 4\overline{b}$. Je li f homomorfizam prstena? Ako da, utvrdite je li f monomorfizam i je li epimorfizam.*

   Rješenje. **(4 boda)** Za elemente $a + b\sqrt{6}, x + y\sqrt{6} \in A$ imamo:

$$\begin{aligned} f\big((a + b\sqrt{6}) + (x + y\sqrt{6})\big) &= f\big((a + x) + (b + y)\sqrt{6}\big) = 6\overline{a + x} + 4\overline{b + y} \\ &= (6\overline{a} + 4\overline{b}) + (6\overline{x} + 4\overline{y}) = f(a + b\sqrt{6}) + f(x + y\sqrt{6}). \end{aligned}$$

   Isto tako, koristeći da je $36 \equiv 6 \pmod{10}$, imamo

$$\begin{aligned} f\big((a + b\sqrt{6})(x + y\sqrt{6})\big) &= f\big((ax + 6by) + (ay + bx)\sqrt{6}\big) = 6\,\overline{ax + 6by} + 4\,\overline{ay + bx} \\ &= 6\,\overline{ax} + 6\,\overline{by} + 4\,\overline{ay} + 4\,\overline{bx}. \end{aligned}$$

   S druge strane, koristeći da je $16, 36 \equiv 6 \pmod{10}$ i $24 \equiv 4 \pmod{10}$, imamo

$$\begin{aligned} f(a + b\sqrt{6})\,f(x + y\sqrt{6}) &= (6\,\overline{a} + 4\,\overline{b})(6\,\overline{x} + 4\,\overline{y}) = 36\,\overline{ax} + 24\,(\overline{ay} + \overline{bx}) + 16\,\overline{by} \\ &= 6\,\overline{ax} + 4\,(\overline{ay} + \overline{bx}) + 6\,\overline{by}. \end{aligned}$$

Onda zaključujemo da je f homomorfizam prstena.

(2 boda) Primijetimo da je jezgra od f očito jednaka

$$\ker f = \{a + b\sqrt{6} \mid 10 \text{ dijeli } 6a + 4b\} = \{a + b\sqrt{6} \mid 5 \text{ dijeli } 3a + 2b\}.$$

Evidentno je npr. nenul element $1 + \sqrt{6}$ u jezgri $\ker f$; i zato f nije monomorfizam.

(*2. način.* Kako je prsten $A = \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ očito kao skup beskonačan, dok prsten $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ ima 10 elemenata, jasno je da ne postoji injekcija iz A u $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.)

(2 boda) Homomorfizam f nije surjektivan jer. se npr. $\overline{1} \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ "ne pogodi". Naime, trebao bi postojati neki $a + b\sqrt{6} \in A$ t.d. je $6\overline{a} + 4\overline{b} = \overline{1}$; tj., da je cijeli broj $6a + 4b - 1$ djeljiv s 10, što je nemoguće.

————————————————————————————-

3. *Odredite sve maksimalne ideale u $\mathbb{Z}[i]$ koji sadrže ideal $(7 + 9i, 6 + 4i)$.*

Rješenje. **(4 boda)** Odredimo najveću zajedničku mjeru d od $7 + 9i$ i $6 + 4i$. Kako je

$$N(7 + 9i) = 7^2 + 9^2 = 130 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \quad \text{i} \quad N(6 + 4i) = 6^2 + 4^2 = 52 = 2^2 \cdot 13,$$

vidimo da je $N(d) = 2 \cdot 13 = 26$. Kako je $26 = 1^2 + 5^2$ jedini rastav broja 26 na sumu dva kvadrata prirodnih brojeva, d tražimo u obliku

$$d = x + iy \quad \text{za} \quad x, y \in \{\pm 1, \pm 5\} \quad \text{takve da je } x^2 + y^2 = 26.$$

Direktnim računom se lagano provjerava da, npr. $1 + 5i$ dijeli $7 + 9i$ i $6 + 4i$, pa je stoga $d = 1 + 5i$ njihova najveća zajednička mjera.

(4 boda) Sada je $(7 + 9i, 6 + 4i) = (1 + 5i)$ pa nam je, da bismo odredili sve maksimalne ideale u $\mathbb{Z}[i]$ koji sadrže ideal $(7 + 9i, 6 + 4i)$, dovoljno odrediti rastav od $d = 1 + 5i$ na produkt ireducibilnih elemenata. Direktnim računom dobivamo

$$d = 1 + 5i = (1 + i)(3 + 2i),$$

gdje su oba faktora s desne strane ireducibilni u $\mathbb{Z}[i]$ jer su njihove norme prosti brojevi: $N(1 + i) = 2$ i $N(3 + 2i) = 13$. Zaključujemo da su maksimalni ideali u $\mathbb{Z}[i]$ koji sadrže $(7 + 9i, 6 + 4i)$ ideali $(1 + i)$ i $(3 + 2i)$.

————————————————————————————-

4. (a) *Neka je A komutativan prsten s jedinicom i neka je B njegov potprsten s jedinicom, te neka je I maksimalan ideal u A. Je li $I \cap B$ nužno prost ideal u B? Je li $I \cap B$ nužno maksimalan ideal u B?*

   (b) *Neka je $p = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ takav da su a i b relativno prosti i neka je $N(x + yi) = x^2 + y^2$ standardna norma na $\mathbb{Z}[i]$. Dokažite da vrijedi inkluzija $N(p)\mathbb{Z} \subseteq (p) \cap \mathbb{Z}$, ideala u $\mathbb{Z}$. Imamo li nužno jednakost $N(p)\mathbb{Z} = (p) \cap \mathbb{Z}$*

Rješenje. (a) **(2 boda)** Dokažimo da je $I \cap B$ nužno prost ideal u B. Prije svega, primijetimo da je $I \cap B \neq B$ jer I ne sadrži jedinicu. Kada $I \cap B$ ne bi bio prost ideal u B, mogli bismo odabrati elemente

$$a, b \in B \setminus I \cap B \quad \text{takve da je} \quad a \cdot b \in I \cap B.$$

Međutim, za te elemente tada očito vrijedi i

$$a, b \in A \setminus I \quad \text{te} \quad a \cdot b \in I,$$

što znači da ideal I u A nije prost pa stoga ne može biti maksimalan. Time smo dobili kontradikciju pa zaključujemo da je $I \cap B$ nužno prost ideal u B.

(1 bod) Ideal $I \cap B$ nije nužno maksimalan ideal u B. Primjerice, za

$$A = \mathbb{R}, \quad B = \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad I = (0)$$

vidimo da je A komutativan prsten s jedinicom, B njegov potprsten s jedinicom te I maksimalan ideal u A, jer, općenito, polje ne može sadržavati prave ideale. S druge, strane $I \cap B = (0)$ nije maksimalan ideal u B jer je sadržan u idealu $2\mathbb{Z}$ u $B = \mathbb{Z}$.

(b) **(2 boda)** Dokažimo da vrijedi inkluzija $N(p)\mathbb{Z} \subseteq (p) \cap \mathbb{Z}$, ideala u $\mathbb{Z}$. Imamo

$$N(p) = a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib) = (a - ib)p \in (p),$$

pa se stoga cijeli broj $N(p)$ nalazi u presjeku $(p) \cap \mathbb{Z}$. Dakle, vrijedi inkluzija $N(p)\mathbb{Z} \subseteq (p) \cap \mathbb{Z}$.

(3 boda) Dokažimo da vrijedi i obratna inkluzija, tj. da imamo jednakost $N(p)\mathbb{Z} = (p) \cap \mathbb{Z}$. Neka je $k \in (p) \cap \mathbb{Z}$ proizvoljan element. Tada se k može zapisati u obliku

$$k = (x + iy)p = (x + iy)(a + ib) = (ax - by) + i(ay + bx) \quad \text{za neki } x + iy \in \mathbb{Z}[i].$$

Kako je k cijeli broj, mora vrijediti

$$ax - by = k \quad \text{i} \quad ay + bx = 0.$$

Kako su 0 i 1 relativno prosti, imamo trivijalan slučaj kada je $p \in \{\pm 1, \pm i\}$ pa se jednakost lako dobije direktnom provjerom. Općenito, neka su $a, b \neq 0$. Iz druge jednakosti slijedi $x = -ay/b$. Uvrštavanjem toga u prvu jednakost dobivamo

$$k = ax - by = -\frac{a^2 y}{b} - by = -\frac{y}{b}(a^2 + b^2) = -\frac{y}{b}N(a + ib) = -\frac{y}{b}N(p). \tag{1}$$

Napokon, kako su a i b relativno prosti, iz druge jednakosti, $ay + bx = 0$ zaključujemo da b dijeli y pa je stoga $-y/b$ cijeli broj. Dakle, iz jednakosti (1) vidimo da se k nalazi u $N(p)\mathbb{Z}$, odakle slijedi inkluzija $(p) \cap \mathbb{Z} \subseteq N(p)\mathbb{Z}$.

———————————————————————————-

5. *Neka je E Euklidova domena i neka je $p \in E$ neki prost element.*
   (a) *Pokažite da je glavni ideal (p) maksimalan ideal u E.*
   (b) *Ako je 1 jedinica prstena E, mora li nužno glavni ideal $(p^2 + 1)$ u prstenu E biti prost?*

(i) *Rješenje.* (a) **(5 bod.)** Znamo s predavanja da je E DGI (po teoremu da je svaka E. domena ujedno i DGI), i onda je p ireducibilan element (po propoziciji da je u svakoj DGI element prost ako i samo ako je ireducibilan). Pretpostavimo da postoji neki ideal $I \trianglelefteq E$ takav da je $(p) \subset I \neq E$; i neka je $I = (g)$. Tada je posebno $p \in I = (g)$, pa postoji $x \in E$ takav da je $p = gx$. Jer je $I \neq E$, onda je $0 \neq g \notin E^*$; tj., g nije invertibilan element. Ali jer je p ireducibilan element, onda je nužno $x \in E^*$. No onda je $g = px^{-1} \in (p)$; i onda $(p) = I = (g)$, što je kontradikcija. Zaključak: (p) je maksimalan ideal u E.

(b) **(3 boda)** Naprimjer, u Euklidovoj domeni $E = \mathbb{C}[x]$ je $p = x$ prost element, ali $x^2 + 1 = (x - \imath)(x + \imath)$ nije prost ($\Leftrightarrow$ ireducibilan) element. Jasno, ideal $(x^2 + 1)$ nije prost u E.