Riješeni i komentirani kratki testovi prisutnosti na nastavi

Franka Miriam Brückler

17. travnja 2025.

1 Pramatematika, Egipat i Mezopotamija

1. Kost iz Lebomba je rovaš koji potječe iz

   ☐ proterozoika.

   ☑ paleozoika.

   ☑ paleolitika.

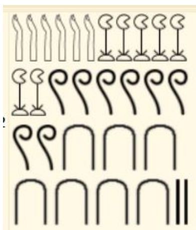
   ☐ mezolitika.

   ☐ mezozoika.

   ☐ neolitika.

   ☐ Nijedno od ponuđenog nije točno.

   Kost iz Lebomba datira se oko 40.000 *godina pr. Kr., što odgovara starijem kamenom dobu, tj. paleolitiku, koje je trajalo do otprilike* 10.000 *godina pr. Kr.*



2. Na slici gore lijevo je prikazana jedna hijeroglifska brojka. Zapisana modernim brojevnim sustavom, to je ...

   ☑ 67872. ☐ 678702. ☐ 607872.

   ☐ 678072. ☐ 6708702. ☐ 6700782.

   Hijeroglifski brojevni sustav bio je nepozicijski aditivan sustav te samo treba zbrojiti vrijednosti znamenki brojke na slici, pri čemu su znamenke hijeroglifskog sustava ove:

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨

3. Na slici je jedna brojka klasičnog babilonskog brojevnog sustava. Kako bismo modernim brojkama zapisali isti broj?

☑ 200/3. ☐ 47. ☐ 164.

☑ 4000. ☑ 237640. ☑ 240000.

Klasični babilonski brojevni sustav je bio pozicijski s primarnom bazom 60*, ali bez znamenke* 0 *(i bez seksagezimalnog zareza odnosno točke). Brojka na slici zapisana modernim znamenkama je* $(1\ 6\ 40)_{60}$*. Zbog nedostatka nule, ona može predstavljati bilo koji broj oblika*

$$1 \cdot 60^k + 6 \cdot 60^m + 40 \cdot 60^n$$

s cijelim brojevima $k > m > n$*. Za* $k = 2$*,* $m = 1$*,* $n = 0$ *dobivamo* 4000*. Za* $k = 1$*,* $m = 0$*,* $n = -1$ *dobivamo* 200/3*. Za* $k = 3$*,* $m = 2$*,* $n = 0$ *dobivamo* 237640*. Za* $k = 3$*,* $m = 2$*,* $n = 1$ *dobivamo* 240000*. Ni za koje* k*,* l*,* m *ne možemo dobiti* 47 *ni* 164*. Naime, ako bi brojka bila* 47*, ona je ujedno znamenka u seksagezimalnom sustavu pa bi se radilo o* <<<< VVVVVVV*. Ako bi pak bila* 164*, prvo bi morao biti* $k = 1$ *(jer za* $k = 2$ *dobijemo broj veći od* 3600*, a za* $k = 0$ *dobivamo broj između* 1 *i* 2*), tj.* $164 = 60 + 6 \cdot 60^m + 40 \cdot 60^n$*, tj.* $104 = 6 \cdot 60^m + 40 \cdot 60^n$*. Sad bi pak morao* m *biti* 0 *(za* $m > 0$ *desno dobivamo broj veći od* 360*, a za* $m < 0$ *dobijemo broj manji od* 1*), pa bi bilo* $104 = 6 + 40 \cdot 60^n$*, tj.* $98 = 10^n$*. No, to je nemoguće.*

2 Jonsko i atensko razdoblje grčke matematike

1. U grčkom alfabetskom brojevnom sustavu M se koristi kao oznaka za 10000 jer je odgovarajuća starogrčka riječ (u romaniziranom zapisu) …

☐ milia.

☐ myliar.

☐ metros.

☐ mikros.

☑ myrias.

Starogrčka riječ za 10000 *je* μυριάς*, što se transkribira s myrias. Milia je latinska riječ za* 1000*, myliar je izmišljena riječ koja podsjeća na našu riječ milijarda, metros je izmišljena riječ koja podsjeća na starogrčku metron značenja mjera, a mikros je transkribirana starogrčka riječ značenja mali, beznačajan.*

2. Označite sve brojeve koji su ujedno *arithmós* u starogrčkom smislu.

☐ 1/3 ☐ 1

☑ 20 ☑ 10000000000000

☐ π ☐ -5

Arithmós su prirodni brojevi s izuzetkom jedinice.

3. Označite sve točne tvrdnje o starogrčkoj geometrijskoj algebri.

☐ Ime je dobila jer su antički Grci jednadžbe rješavali geometrijskim konstrukcijama.

☐ U geometrijskoj algebri možemo se pitati za koju duljinu je njena dvostruka duljina jednaka njenom kvadratu.

☑ Perigalov dokaz Pitagorinog poučka bio bi prihvatljiv u smislu geometrijske algebre.

☐ U geometrijskoj algebri možemo uspoređivati brojeve s brojevima, duljinama, površinama i volumenima.

Antički Grci nisu imali ideju jednadžbi te ih stoga nisu rješavali nikakvim metodama. U starogrčkoj geometrijskoj algebri mogu se uspoređivati samo istovrsne veličine, dakle dva (prirodna) broja ili dvije duljine ili dvije površine ili dva volumena, a likovi (npr. kvadrat) se poistovjećuju sa svojim mjerama (nrp. površinom). Stoga specijalno ne možemo tražiti duljinu tako da je njena dvostruka duljina jednaka ikojem geometrijskom liku, tj. njegovoj površini. Perigalov dokaz bio bi prihvatljiv u smislu geometrijske algebre jer se jednakost dviju površina dokazuje rastavljanjem jedne na konačno mnogo dijelova iz kojih je sastavljena druga, a svi dijelovi su četverokuti koji bi se mogli konstruirati ravnalom i šestarom.

4. Označite srednje geometrijske proporcionale između 1 cm i 64 cm!

☐ 1 ☐ 1 cm ☐ 2 ☐ 2 cm ☐ 4 ☑ 4 cm ☐ 8

☐ 8 cm ☐ 16 ☑ 16 cm ☐ 32 ☐ 32 cm ☑ 64 ☐ 64 cm

Srednje geometrijske proporcionale između dviju istovrsnih veličina a i b su s njima istovrsne veličine x i y takve da je $a : x = x : y = y : b$. Budući da su ovdje a i b duljine, x i y također moraju biti duljine. Lako se vidi da je $1 : 4 = 4 : 16 = 16 : 64$, dakle su tražene srednje geometrijske proporcionale $4\,\text{cm}$ i $16\,\text{cm}$.

5. Jedan tip silogizma, poznat pod nazivom Barbara, bi za primjer imao sljedeće zaključivanje: „Svi ljudi su smrtni. Svi matematičari su ljudi. Dakle, svi matematičari su smrtni“. S obzirom na ono što smo u kolegiju naučili o Aristotelovom pojmu silogizma, što od sljedećeg je točno?

☐ ovo nije silogizam u Aristotelovom smislu

☑ ovo je silogizam prve figure (AB BC AC)

☐ ovo je silogizam druge figure (AC BC AB)

☐ ovo je silogizam treće figure (AB AC BC)

Prva rečenica je istinit kategorički sud s kvantorom 'svi', subjektom 'ljudi' (B), kopulom 'su' i predikatom 'smrtni' (C). Druga rečenica je istinit kategorički sud s kvantorom 'svi', subjektom 'matematičari' (A), kopulom 'su' i predikatom 'ljudi' (B). Dakle, to su dopustive dvije premise za Aristotelov silogizam koje su tipa AB i BC. Iz njih je izvedena istinita konkluzija tipa AC, dakle se radi o silogizmu prve figure.

6. Koja/e od sljedećih definicija parabole je/su u duhu Menehmovog shvaćanja te krivulje?

☐ Parabola je krivulja jednadžbe $y = 2px^2$ ili $x = 2py^2$.

☐ Parabola je skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od zadane točke i zadanog pravca.

☐ Parabola je krivulja koja se dobije presjekom prozivoljnog kružnog stošca ravninom paralelnom jednoj njegovoj izvodnici.

☑ Parabola je krivulja koja se dobije presjekom uspravnog kružnog stošca kojemu je osni presjek pravokutni trokut s ravninom okomitom na izvodnicu.

☐ Parabola je osnosimetrična krivulja oblika slova U.

☐ Parabola je krivulja po kojoj se kreće točka koja u svakom trenutku ima jednaku udaljenost od početne pozicije i jednog fiksnog pravca.

☐ Parabola je osnosimetrična krivulja takva da ako na nju upadaju zrake paralelne s osi simetrije i zrcale se na njoj, sve zrcaljene zrake se sijeku u jednoj točki.

☐ Parabola je krivulja sa svojstvom da joj je tangenta u svakoj točki simetrala spojnice te točke s jednom fiksnom točkom i okomice iz te točke na jedan fiksni pravac.

Mehehmo je konike gledao isključivo kao presjeke uspravnih kružnih stožaca ravninama okomitim na njihove izvodnice, a parabolu je dobio takvim presjekom za slučaj da je osni presjek pravokutni trokut.

3 Helenističko razdoblje grčke matematike

1. Što od sljedećeg se može kvadrirati ravnalom i šestarom?

   ☑ lik omeđen obrisom pitagorejskog pentagrama, tj .pravilna peterokraka zvijezda

   ☑ pravilni 17-erokut ☐ krug ☐ elipsa

   ☑ treći Hipokratov mjesec ☐ svaki mjesec ☑ pravokutnik

   Ravnalom i šestarom mogu se kvadrirati svi uglati likove te Hipokratovi mjeseci. Općenito (to nismo radili na nastavi) ravnalom i šestarom se može svaki kvadrirati lik površine P takve da se P može zapisati kao kvadratni polinom s cjelobrojnim koeficijentima i varijablom x koja predstavlja duljinu stranice kvadrata te općenitije ako je P bilo kakav polinom u x s cjelobrojnim koeficijentima čija nultočka x se može izraziti s konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugog korijena primijenjenih na koeficijente. Budući da je za krug $P = x^2\pi$, a π je transcendentan, kvadratura kruga nije provediva ravnalom i šestarom, a iz istog razloga ni kvadratura elipse (površina je $a\,b\,\pi$).

2. Da je Eratosten određujući opseg Zemlje umjesto udaljenosti između Syene i Aleksandrije imao na raspolaganju zračnu udaljenost između Aleksandrije i današnje Burse u Turskoj (prilično točno sjeverno od Aleksandrije) u iznosu 623 milja te da je kut između štapa i zraka Sunca na dan kad je Sunce točno iznad Burse izmjerio kao 8°, koliki bi opseg Zemlje dobio (u miljama!)? 28035 *milja.*

   Zamjenom kuta $\frac{1}{50}$ punog kuta s 8° i udaljenosti 5000 stadija s 623 milje u Eratostenovom postupku dobivamo razmjer $8 : 360 = 623 :$ opseg Zemlje, tj. traženi opseg je $623 \cdot \frac{360}{8}$ milja.

3. Razmotrimo specijalni slučaj Apolonijeve definicije kružnice u kojem gledamo geometrijsko mjesto G svih točaka u ravnini kojima je omjer udaljenosti od dviju fiksnih točaka A i B jednak 2:1. Što je točno za G?

☐ G je kružnica beskonačnog polumjera, tj. pravac

☑ središte kružnice G je na pravcu AB

☐ polumjer kružnice G je $\frac{1}{2}|AB|$

☐ središte kružnice G je polovište dužine koja spaja A i B

☑ G je kružnica koja prolazi kroz točku C takvu da je B polovište dužine koja spaja A i C

☑ promjer kružnice G je $\frac{4}{3}|AB|$

Po Apolonijevoj definiciji kružnica je skup svih točaka T u ravnini takvih da je $|TA| : |TB| = k =$konstanta. U našem slučaju $k = 2$. Središte tako zadane kružnice uvijek je na pravcu AB. Na tom pravcu imamo dvije točke koje zadovoljavaju definiciju: Jedna je između A i B na poziciji $D = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, ako uzmemo da je A ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, a $B = (1, 0)$. Druga takva točka je izvan dužine $\overline{AB}$, na poziciji $C = (2, 0)$, tj. B je polovište $\overline{AC}$. Stoga je središte (koje kako smo rekli mora biti na pravcu AB, tj. x-osi) polovište spojnice tih dviju točaka, tj. središte je $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ te joj je polumjer $\frac{2}{3}|AB|$.

4. Ako u Arhimedovom postupku za procjenu omjera opsega i omjera kruga u kojem krug ima polumjer 1 računamo s decimalnim brojkama i stanemo na 2. koraku (brojano od nultog, početnog koraka), na koliko decimala točnu vrijednost broja Pi smo dobili? *Na jednu decimalu.*

U Arhimedovom algoritmu u nultom koraku imamo opseg upisanog pravilnog šesterokuta (6) i opisanog ($4\sqrt{3} \approx 6{,}92820323$). U prvom koraku se iz njih prvo dobije opseg opisanog pravilnog 12-erokuta (približno 6,430780618) te upisanog (približno 6,211657082). U drugom koraku se iz njih prvo dobije opseg opisanog pravilnog 24-erokuta (približno 6,319319884) te upisanog (približno 6,265257227), dakle je 2π između ta dva broja, odnosno procjena za π je da je između 3,132628613 i 3,159659942, dakle točna na jednu decimalu.

5. Ako kao kod Ptolemeja uzmemo da je opseg kruga 360° i promjer kruga 120^p, koliko iznosi tet(45°) (seksagezimalno, zaokruženo na točnost na šezdesetinku, tj. minutu)?

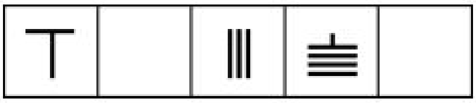
☐ $0^p42'$ ☐ $0^p46'$ ☐ $0^p71'$ ☐ $0^p77'$

☐ $42^p26'$ ☐ $42^p43'$ ☑ $45^p55'$ ☐ $45^p92'$

☐ nijedan od ponuđenih odgovora nije točan

Odgovori u kojima je navedeni iznos minuta 60 ili veći sigurno nisu točni jer se ne može raditi o zapisu u seksagezimalnom sustavu. Također, budući da je $\mathrm{tet}(45^\circ) = 2r\sin(22{,}5^\circ) = 120^p \sin(\pi/8)$, očito ni odgovori s 0° ne mogu biti točni. Izračunavanje $120^p \sin(\pi/8) = 60\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 45{,}922^p$ ostavlja nam mogućnost $45^p55'$ ili da nijedan ponuđeni odgovor nije točan. No, 0,922 seksagezimalo je $0^\circ 55' 19''$, dakle je točan odgovor $45^p55'$.

4 Starokineska i staroindijska matematika



1. Na slici gore je prikazana jedna kineska štapićasta brojka (cijeli broj) iz doba kad je napisano „Devet poglavlja umijeća računanja“. Zapišite isti broj modernom brojkom! -60390 .

   U doba „Devet poglavlja“ crni štapići su korišteni za negativne brojeve, a crveni za pozitivne, dakle je na slici negativan broj. Brojevni sustav štapičastih brojki je dekadski pozicijski bez znamenke za nulu, za koju se (ne uvijek) kao na slici ostavljala prazna pozicija. Horizonalni raspored štapića vezan je za neparne potencije od 10, a pritom se za znamenke veće od 5 koristila pokrata iznosa 5 jednim štapićem okomitim na ostale. Stoga su znamenke na slici redom 6 *(uz parnu potenciju od* 10*, sa slike se vidi da je to* 10^4*),* 3 *(vrijednosti* 10^2*) i* 9 *(vrijednosti* 10^1*).*

2. U starokineskoj matematičkoj literaturi pravilo za računanje površine kruga izražavano je preko omjera površine kvadrata i površine kruga koji mu je opisan. Koliko iznosi taj omjer u "Điudžang suanšu"? A kvadrat tog omjera kod Džang Henga?

   U "Điudžang suanšu", tj. „Devet poglavlja umijeća računanja“, taj omjer je 4:3.

   Džang Heng daje 8:5 kao kvadrat tog omjera.

3. Kako danas nazivamo algoritam za rješavanje polinomijalnih jednadžbi kojeg su kineski matematičari otkrili u razdoblju 7.-13. st.? *Hornerov algoritam*.

4. Što sve možemo naći u Sulvasutrama?

   ☐ dokaz Pitagorinog poučka ☑ različite pitagorejske trojke

   ☐ nulu ☐ računanje u dekadskom pozicijskom sustavu

   ☐ Pellovu jednadžbu ☐ sinus, tj. polutetivu

   U Sulbasustrama nalazimo, bez dokaza, različite geometrijske rezultate i konstrukcije. Budući da su Sulbasustre nastale sigurno prije najranijeg mogućeg datiranja nule kao znamenke (najranije ako je rukopis Bakshali nastao u 2. st. pr. Kr.) i broja (najranije nešto prije Brahmagupte), u njima nemamo ni nule ni dekadskog pozicijskog sustava. Najraniji indijski rezultati iz trigonometrije su tek iz 5. *st. n. e., a najraniji rezultati vezani za Pellovu jednadžbu još nešto kasnije.*

5. S čime se bavio Brahmagupta?

   ☑ trigonometrijom ☑ geometrijom ☑ Pellovom jednadžbom

   ☐ numeričkim rješavanjem jednadžbi ☑ pravilima računskih operacija

6. S čime se bavio Bhaskara II.?

   ☑ trigonometrijom ☑ kombinatorikom ☑ Pellovom jednadžbom

   ☐ numeričkim rješavanjem jednadžbi ☑ računanjem u dekadskom pozicijskom sustavu

7. Koji su indijski doprinosi trigonometriji?

☑ prijelaz s računa tetiva na račun polutetiva

☐ sistematizacija trigonometrije

☐ odvajanje trigonometrije od astronomije

☑ uvođenje trigonometrijske veličine koja odgovara modernom kosinusu

☐ uvođenje trigonometrijske veličine koja odgovara modernom tangensu

Indijci su prvi koristili sinus, tj. polutetivu ($r \sin\alpha$), oko 500. *g. n. e., a nešto kasnije i kosinus ($r\cos\alpha$) i sinus versus ($r(1-\cos\alpha)$). No, Indijci nikoji dio matematike nisu sustavno istraživali, a trigonometrija je u cijelom klasičnom indijskom razdoblju ostala pomoćna disciplina astronomije, a ne samostalna grana matematike.*

5 Matematika u arapskom (abasidskom) kalifatu

1. Počeci matematičke djelatnosti u arapskom svijetu, prije al Hvarizmija, vezani su za ...

☐ Omejidski kalifat ☑ kalifa Al Ma'muna ☑ Kuću mudrosti

☐ prevođenje latinskih tekstova na arapski jezik

☐ prihvaćanje indijskog dekadskog pozicijskog sustava s nulom kao dominantnog

*Znanstvena djelatnost u arapskom svijetu započinje u Abasidskom kalifatu (*750.*–*1517.*), nakon dolaska na vlast Haruna al-Rašida, ispočetka prvenstveno u obliku prevođenja grčkih tekstova na arapski te još više njegovog sina Al Ma'muna, koji je nakon stupanja na vlast* 813. *godine Kuću mudrosti u Bagdadu oformio kao znanstveni centar i ona će biti glavni znanstveni centar arapskog svijeta do 1258., kad je uništena kad su Bagdad osvojili Mongoli. U to doba dolazi i do arapskog kontakta s indijskim znanjima uključivo dekadskog pozicijskog sustava s nulom, no tek u desetljećima nakon nakon Al Hvarizmija (djelovao oko* 825.*) on će postati dominantan u arapskom svijetu.*

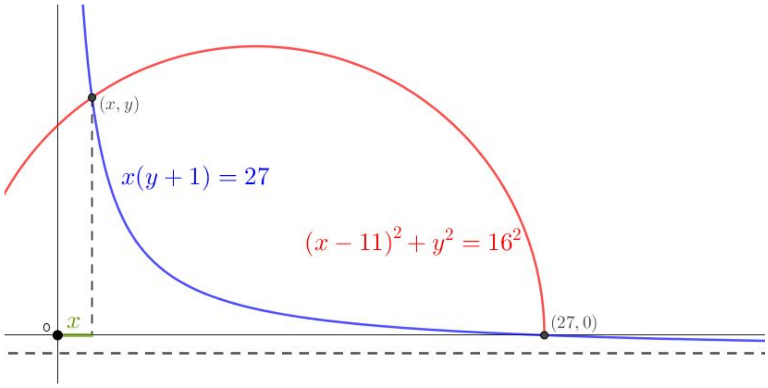
2. ٢٠٢٥ je jedan broj zapisan istočnoarapskom brojkom. Kako mi zapisujemo isti broj? $\boxed{2025}$

3. Dolje je jedna jednadžba riješena modernom simbolikom, ali na al-Hvarizmijev način, u šest koraka. U koliko koraka je korištena operacija al-džabr, a u koliko al-mukabala?

$$4x+8=(5-x)^2-4x^2$$
$$4x+8=25-10x+x^2-4x^2$$
$$4x+8+10x+4x^2=25+x^2$$
$$4x^2+14x+8=25+x^2$$
$$3x^2+14x=17$$
$$x^2+\frac{14}{3}x=\frac{17}{3}$$
$$x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{3}\right)^2+\frac{17}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{3}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{17}{3}}-\frac{7}{3}=\sqrt{\frac{100}{9}}-\frac{7}{3}=\frac{10}{3}-\frac{7}{3}=1$$

Al-džabr i al-mukabala su korištene svaka po jednom, aldžabr u prijelasku iz drugog u treći red, a al-mukabala u prijelasku iz četvrtog u peti red.

4. Omar Hajjam (Khayyam) je 13 od 19 tipova kubnih jednadžbi rješavao presjekom krivulja 2. reda. Na slici dolje je ilustrirano kako bi Hajjam riješio jednu konkretnu jednadžbu presjekom polukružnice i istostrane hiperbole. Radi lakšeg razumijevanja, dodan je i moderni Kartezijev koordinatni sustav i jednadžbe tih dviju krivulja te je istaknuto jedno očigledno sjecište tih krivulja i drugo iz kojeg se dobiva rješenje zadane jednadžbe. Ako bismo jednadžbu koju je ovako riješio Hajjam zapisali na moderan način u obliku $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, ovisno o prvom slovu svoje mail adrese navedite iznos koeficijenta a, b ili c.



$a = 5$, $b = 1$, $c = -27$.

Rješenje x Hajjamove kubne jednadžbe računski dobijemo kao x-komponentu rješenja sustava koji se sastoji od jednadžbi hiperbole i kružnice. Supstitucija y iz jednadžbe hiperbole u jednadžbu kružnice te množenje s x^2 taj sustav svodi na jednadžbu $x^4 - 22x^3 - 134x^2 - 54x + 729 = 0$. Jedno njeno rješenje je $x = 27$ te dijeljenjem $x^4 - 22x^3 - 134x^2 - 54x + 729$ s $x - 27$ dobijemo $x^3 + 5x^2 + x - 27 = 0$.

5. Dok je u prvom dijelu vremena Arapskog (abasidskog) kalifata glavni centar kulture i znanosti bio Bagdad, u kasnijem razdoblju tu ulogu je preuzela Granada. Točno ili ne? *Ne.*

   U kasnijem razdoblju na istoku je glavni centar bio Samarkand, a na zapadu Córdoba.