Linearna algebra 1, 2022./2023.

Prva domaća zadaća

1. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ zadani su vektori

$$a_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ a_2 = (2, 2, 0, \ldots, 0), \ldots,\ a_n = (n, n, n, \ldots, n)$$

(dakle, prvih k komponenti u a_k iznosi k, dok su sve ostale komponente u a_k jednake 0, $k = 1, 2, \ldots, n$). Dokažite da je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ baza za $\mathbb{R}^n$.

2. Neka su a, b realni brojevi takvi da je $b \neq a$ i $b \neq -3a$. Dokažite da je skup

$$\{(b, a, a, a), (a, b, a, a), (a, a, b, a), (a, a, a, b)\}$$

linearno nezavisan u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$.

3. Neka je $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ i $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$. Odredite linearne ljuske $[A]$ i $[B]$.

4. Neka je $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ baza vektorskog prostora V. Dokažite da je tada i skup $B_1 = \{b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_1 + b_n\}$ baza za V. (U skupu B_1 je prvi član b_1, dok je k-ti član jednak $b_1 + b_k$, za sve $k \geq 2$.)

5. U prostoru P_3 (prostor realnih polinoma čiji stupanj je manji od ili jednak 3) nađite neku bazu čiji svi elementi imaju stupanj upravo 3. U toj bazi prikažite polinom $p(t) = 2t - 1$.