MATIČNI BROJ STUDENTA

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

popravni kolokvij - 30. kolovoza 2021.

ZADATAK 1

Za $n \in \mathbb{N}_0$ neka je $L_n : \mathcal{P}_n \to M_2(\mathbb{R})$ zadan sa $L_n(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(2) \end{bmatrix}$.

a) (6 bodova) Odredite rang i defekt za L_3. Je li L_3 izomorfizam?

b) (4 boda) Za koje $n \in \mathbb{N}_0$ je L_n monomorfizam/epimorfizam?

Napomena: $\mathcal{P}_n$ je prostor polinoma stupnja manjeg od ili jednako n.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

popravni kolokvij - 30. kolovoza 2021.

ZADATAK 2

a) (7 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$. Zadan je matrični prikaz operatora A u bazi $(f) = \{(2,1,1),(2,1,0),(1,0,0)\}$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ kao

$$A(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite matrični prikaz operatora A u paru kanonske baze (e) i baze (f) te matrični prikaz operatora A u paru kanonske baze (f) i baze (e), tj. odredite matrice $A(f,e)$ i $A(e,f)$. Je li operator A regularan?

b) (3 boda) Postoje li $x \in \mathbb{R}$ i baza (g) vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ takvi da je

$$A(g) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & x \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

popravni kolokvij - 30. kolovoza 2021.

ZADATAK 3

a) (6 bodova) Koristeći Gram Schmidtov postupak ortonormirajte sustav

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_3(\mathbb{R}),$$

obzirom na standardni skalarni produkt na $M_3(\mathbb{R})$.

b) (4 boda) Odredite ortogonalnu projekciju matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ na $S^{\perp}$, ortogonalni komplement od S.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

popravni kolokvij - 30. kolovoza 2021.

ZADATAK 4

Za $\gamma \in \mathbb{R}$ kvadratna forma $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadana je formulom:

$$q(x_1, x_2, x_3) = \gamma x_1^2 + x_2^2 + \gamma x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

a) (4 boda) Odredite vrijednosti parametra γ za koje je forma pozitivno definitna.

b) (6 bodova) Za $\gamma = -2$ svedite kvadratnu formu na kanonski oblik i odredite definitnost forme.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

popravni kolokvij - 30. kolovoza 2021.

ZADATAK 5

(10 bodova) Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem i $A \in L(V,W)$ operator ranga 1. Dokažite da postoje baze e za V i f za W takve da matrica operatora A u tom paru baza ima oblik

$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$