MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 19. travnja 2021.

ZADATAK 1

(5 bodova) Neka je $T \in M_2(\mathbb{R})$ i $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ preslikavanje zadano s $f(A) = AT - TA$.

(a) Dokažite da je f linearni operator.

(b) Postoji li $T \in M_2(\mathbb{R})$ takav da je f epimorfizam? Postoji li $T \in M_2(\mathbb{R})$ takav da je f monomorfizam?

(c) Odredite rang, defekt i po jednu bazu za jezgru i sliku od f ako je $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje:

(a) (1 bod) Neka su $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} f(\alpha A + \beta B) &= (\alpha A + \beta B)T - T(\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha AT + \beta BT - T(\alpha A) - T(\beta B) \\ &= \alpha AT - \alpha TA + \beta BT - \beta TA \\ &= \alpha(AT - TA) + \beta(BT - TB) \\ &= \alpha f(A) + \beta f(B). \end{aligned}$$

Koristimo distributivnost množenja matrica prema zbrajanju i kvaziasocijativnost množenja matrice skalarom.

Dakle, f je linearni operator.

(b) (2 boda) Primijetimo da je f monomorfizam ako i samo ako je epimorfizam jer su domena i kodomena jednake, posebno imaju istu dimenziju pa možemo koristiti propoziciju koja kaže da je za linearni operator s domenom i kodomenom iste dimenzije ekvivalentno biti monomorfizam i epimorfizam.

Jedan način da vidimo da f ne može biti monomorfizam ni za jednu matricu T: za bilo koji T imamo da je $f(I) = 0$ (odnosno, jedinična matrica uvijek komutira s T) pa postoji netrivijalna (ne-nul) matrica koja je u jezgri od f. Prema propoziciji (f monomorfizam $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$) onda f sigurno nije monomorfizam.

Ako želimo pokazati da f ne može biti epimorfizam, jedan način je pogledati trag: sjetimo se da za sve matrice A i B vrijedi $tr(AB) = tr(BA)$. Zato je za svaku matricu A iz domene (a i za svaku fiksiranu matricu T) $tr\ f(A) = 0$. Drugim riječima, u slici od f se nalaze samo matrice traga 0, odnosno u slici od f se ne može nalaziti, npr. I. Zato f ne može biti epimorfizam.

(c) (2 boda)Pogledajmo što je $f(A)$ za neku matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} f\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) &= \begin{bmatrix} -b-c & a-d \\ a-d & b+c \end{bmatrix} \\ &= (a-d)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (b+c)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz prve jednakosti je jasno da $f(A) = 0$ dovodi do sustava $a - d = 0, b + c = 0$, odnosno

$$\ker f = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dakle, $d(f) = 2$ i jedna baza za jezgru je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Iz teorema o rangu i defektu znamo da je $r(f) = 4 - d(f) = 2$, a iz prikaza od $f(A)$ od ranije matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ očito pripadaju slici od f. Obzirom da je taj dvočlani skup očito linearno nezavisan i $r(f) = 2$, to je jedna baza za sliku.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 19. travnja 2021.

ZADATAK 2

Neka je $M = [(1,2,0,0),(0,0,1,2)] \leq \mathbb{R}^4$.

(a) (2 boda) Pronađite bazu za M^0 (anihilator od M).

(b) (3 boda) Pronađite sve funkcionale $f \in (\mathbb{R}^4)^*$ takve da je $f \in M^0$ i $f(1,0,0,1) = 3$ (zapišite kako djeluju na općeniti $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$).

Rješenje:

(a) Označimo $a_1 = (1,2,0,0), a_2 = (0,0,1,2)$.
Nadopunimo tu bazu od M do baze za $\mathbb{R}^4$ s vektorima $e_2 = (0,1,0,0)$ i $e_4 = (0,0,0,1)$ (jedan mogući izbor). Neka je $\{a_1^*, a_2^*, e_2^*, e_4^*\}$ baza od $(\mathbb{R}^4)^*$ dualna toj bazi. Tada će $\{e_2^*, e_4^*\}$ biti baza od M^0.

Izračunajmo kako elementi te baze djeluju na općeniti $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ (**bez ovoga se rješenje ne smatra potpunim**). Napišimo (x,y,z,w) preko naše baze:

$$\begin{aligned}(x,y,z,w) &= \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma e_2 + \delta e_4 \\ &= (\alpha, 2\alpha, 0, 0) + (0,0,\beta,2\beta) + (0,\gamma,0,0) + (0,0,0,\delta) \\ &= (\alpha, 2\alpha+\gamma, \beta, 2\beta+\delta).\end{aligned}$$

Slijedi $\gamma = y - 2x, \delta = w - 2z$ i tada imamo

$$e_2^*(x,y,z,w) = y - 2x, \quad e_4^*(x,y,z,w) = w - 2z. \tag{1}$$

(b) Neka je f funkcional na $\mathbb{R}^4$ takav da $f \in M^0$ i $f(1,0,0,1) = 3$. Budući da je $f \in M^0$, iz (a) dijela imamo $f = \alpha e_2^* + \beta e_4^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Koristeći formulu (1) imamo:

$$3 = f(1,0,0,1) = \alpha e_2^*(1,0,0,1) + \beta e_4^*(1,0,0,1) = -2\alpha + \beta.$$

Slijedi da je $\beta = 2\alpha + 3$. Potpun skup rješenja je tada dan s:

$$f_\alpha = \alpha e_2^* + (2\alpha+3)e_4^*, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tada je prema (1) $f_\alpha(x,y,z,w) = \alpha(y-2x) + (2\alpha+3)(w-2z)$.

Napomena: Ovdje je prikazan jedan mogući izbor vektora s kojima se može nadopuniti baza od M do baze od $\mathbb{R}^4$. Drukčiji izbor (npr. e_1, e_3) može dati drukčije funkcionale kao bazu od M^0. Takvi izbori ne utječu na bodovanje :).

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 19. travnja 2021.

ZADATAK 3

(5 bodova) Dan je linearan operator $B : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ formulom

$$B(a + bt + ct^2) = (a + c) + bt + (a - c)t^2.$$

Odredite matrični zapis operatora B u kanonskoj bazi $(e) = \{1, t, t^2\}$, te u bazi $(e') = \{1 + t^2, 2 - t + 2t^2, 1\}$. Prikažite polinom $1 + t + t^2$ u bazi (e'). Odredite rang i defekt ovog linearnog operatora. Obrazložite odgovor.

Rješenje: Gledamo djelovanje od B na bazi (e): $B(1) = 1 + t^2, B(t) = t, B(t^2) = 1 - t^2$. Dakle

$$B(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Odredimo matrice prijelaza

$$I(e, e') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad I(e', e) = I(e, e')^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sada je

$$B(e') = I(e', e)B(e)I(e, e') = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dalje

$$(1 + t + t^2)_{(e')} = I(e', e)(1 + t + t^2)_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Na kraju imamo

$$r(B) = r(B_{(e)}) = 3, \text{ te } d(B) = \dim\mathcal{P}_2 - r(B) = 0.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 19. travnja 2021.

ZADATAK 4

(5 bodova) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje se linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi zadan s

$$A(e,e) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati.

Rješenje: Vrijedi $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - x)(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$. Nadalje, vrijedi $g(-2) = 2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Sada imamo tri mogućnosti:

1. slučaj: Za $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ je $g(-2) = a(-2) = 2$. Nadalje, vrijedi $1 \leq g(1) \leq a(1) = 1$ pa je $g(1) = a(1) = 1$ i $1 \leq g(x) \leq a(x) = 1$ pa je $g(x) = a(x) = 1$. U ovom slučaju se A može dijagonalizirati.

2. slučaj: Za $x = -2$ je $g(-2) = 2$, a $a(-2) = 3$ pa se A ne može dijagonalizirati.

3. slučaj: Za $x = 1$ je $g(-2) = a(-2) = 2$, a računski dobijemo da je $g(1) = 2 = a(1)$. I u ovom slučaju se operator može dijagonalizirati.

Dakle, A se može dijagonalizirati za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 19. travnja 2021.

ZADATAK 5

(5 bodova) Neka je V vektorski prostor, $A \in L(V)$ te neka su x i y svojstveni vektori operatora A koji pripadaju međusobno različitim svojstvenim vrijednostima α i β. Pokažite da $2x + 3y$ nije svojstven vektor operatora A.