LINEARNA ALGEBRA 2

neki dokazi sa predavanja

Igor Ciganović

Ovdje su izložene neke tvrdnje i dokazi sa predavanja koji se ne nalaze u knjizi D. Bakića Linearna algebra i primjene.
Ako nije drugačije naglašeno, reference se odnose na navedenu knjigu ili ovdje uvedene tvrdnje.

Aproksimacija

Lema 5.2.30. (Generaliziran Pitagorin teorem) Neka je V konačno dimenzionalan unitaran vektorski prostor, $|| \ ||$ norma inducirana skalarnim produktom, odnosno $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ za $v \in V$. Neka su $x, y \in V$ okomiti. Tada je $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2. \end{aligned}$$

□

Propozicija 5.2.30. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran vektorski prostor, $|| \ ||$ norma inducirana skalarnim produktom, odnosno $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ za $v \in V$, M potprostor od V i $x \in V$. Tada,

1) postoji jedinstven $y_0 \in M$, takav da za sve $y \in M$ vrijedi $||x - y_0|| \leq ||x - y||$,

2) $y_0 = Px$, gdje je $P : V \to V$ ortogonalan projektor na M,

3) za svaki $y \in M$ vrijedi: $y = y_0$ ako i samo ako je $x - y \in M^\perp$.

Dokaz. Kako je $V = M \oplus M^\perp$, postoje jedinstveni $a \in M$ i $b \in M^\perp$ takvi da je $x = a + b$. Neka je $P : V \to V$ ortogonalan projektor na M. Imamo $Px = a$, pa je $x - Px = b \in M^\perp$. Neka je $y \in M$ proizvoljan, prema Lemi 5.2.30 imamo

$$||x-y||^2 = ||\underbrace{x - Px}_{\in M^\perp} + \underbrace{Px - y}_{\in M}||^2 = ||x - Px||^2 + ||Px - y||^2 \geq ||x - Px||^2.$$

Dakle izraz $||x-y||^2$ postiže minimum u $y \in M$ ako i samo ako je $||Px - y||^2 = 0$, odnosno $Px = y$. Pokazali smo 1) i 2).
Ako je $y = y_0 (= Px)$, već smo pokazali da je $x - Px \in M^\perp$. Obratno, neka je $y \in M$ takav da je $x - y \in M^\perp$. Zbog jedinstvenosti prikaza, obzirom na dekompoziciju $V = M \oplus M^\perp$, te rastave $x = y + (x - y) = Px + (x - Px)$, imamo $y = Px = y_0$.

□

Propozicija 5.3.1 Neka su $A \in M_{mn}$ i $b \in M_{m1}$. Tada je za svaki $x \in M_{n1}$ ekvivalentno

1) $A^*Ax = A^*b$,

2) za sve $w \in M_{n1}$ je $||Ax - b|| \leq ||Aw - b||$,

3) $Ax = Pb$, gdje je P ortogonalan projektor na $M = \{Ax \mid x \in M_{n1}\}$.

Nadalje, sustav u 1) po x ima rješenje i svako rješenje od 1) zovemo rješenje sustava $Ax = b$ u smislu najmanjih kvadrata.

Dokaz. Potprostor $M = \{Ax \mid x \in M_{n1}\}$ od M_{m1} je potprostor kojeg razapinju stupci od A. Po Propoziciji 5.2.30. postoji jedinstven $y_0 \in M$ takav da je $||y_0 - b|| \leq ||y - b||$, za sve $y \in M$, te za $y \in M$ vrijedi $y = y_0 \Leftrightarrow y - b \in M^{\perp}$. Uvjet $y - b \in M^{\perp}$ znači da je vektor $y - b \in M_{m1}$ okomit na stupce matrice A, što je ekvivalentno s $A^*(y - b) = 0$. Dakle

$$(\forall y \in M)(y = y_0 \Leftrightarrow y - b \in M^{\perp} \Leftrightarrow A^*(y - b) = 0).$$

Sada $y_0 \in M \Rightarrow \exists x_0 \in M_{n1}, Ax_0 = y_0 \Rightarrow A^*(Ax_0 - b) = 0 \Rightarrow A^*Ax_0 = A^*b$, pa sustav u 1) po x ima rješenje.
Pretpostavimo 2). Tada je $Ax = y_0$, pa kao gore imamo $A^*Ax = A^*b$, odnosno 1).
Pretpostavimo 1). Tada je $A^*(Ax - b) = 0$. Iz gornjih ekvivalencija imamo $Ax = y_0$, odnosno 2).
Na kraju, iz Propozicije 5.2.30 imamo $y_0 = Pb$, pa je

$$Ax = Pb \Leftrightarrow Ax = y_0.$$

Dakle 3) $\Leftrightarrow$ 2). □

Normalni operatori

Lema 5.4.14.1. Neka je V vektorski prostor, $A, B \in L(V)$, takvi da je $AB = BA$. Tada su Ker A i Im A invarijantni za B, te Ker B i Im B invarijantni za A.

Dokaz. Dovoljno je pokazati prvu tvrdnju.

$$x \in \text{Ker } A \Rightarrow ABx = BAx = B0 = 0 \Rightarrow Bx \in \text{Ker } A,$$
$$y \in \text{Im } A \Rightarrow \exists x \in V, Ax = y \Rightarrow \exists x \in V, ABx = BAx = By \Rightarrow By \in \text{Im } A.$$

□

Definicija. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, za $A \in L(V)$ kažemo da je normalan ako je $AA^* = A^*A$.
Uočimo: zbog $(A^*)^* = A$, A je normalan, ako i samo ako je A^* normalan.

Napomena. U knjizi Lj. Arambašić, Linearna algebra, Propozicija 8.30, možete naći sljedeću tvrdnju i njen dokaz: Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, $A \in L(V)$ je normalan ako i samo ako za svaki $x \in V$ vrijedi $||Ax|| = ||A^*x||$.

Napomena. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, te I identiteta na V. Tada je $I^* = I$. Naime za ONB e od V je po Propoziciji 5.4.12 $(I^*)_{(e)} = (I_{(e)})^*$ što je jedinična matrica.

Propozicija 5.4.16.1. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, $A \in L(V)$ normalan, takav da je $\sigma(A) \neq \emptyset$. Tada, za $\lambda \in \sigma(A)$ potprostori $V_A(\lambda)$ i $V_A(\lambda)^{\perp}$ su invarijantni za A, te je $V_{A^*}(\overline{\lambda}) = V_A(\lambda)$. Svojstveni potprostori od A, koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno okomiti.

Dokaz. $(A - \lambda I)$ je normalan jer

$$(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = AA^* - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I,$$
$$(A - \lambda I)^*(A - \lambda I) = A^*A - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + |\lambda|^2 I.$$

Lema 5.4.14.1 $\Rightarrow$ Im $(A-\lambda I)^*$ je invarijantan za $(A-\lambda I)$.
Propozicija 5.4.14 $\Rightarrow V = \text{Ker } (A-\lambda I) \oplus \text{Im } (A-\lambda I)^*$ gdje je Ker $(A-\lambda I) = V_A(\lambda)$ i Im $(A-\lambda I)^* = V_A(\lambda)^\perp$. Slijedi $V_A(\lambda)^\perp$ je invarijantan za $A-\lambda I$, pa je invarijantan i za $A-\lambda I+\lambda I = A$, a $V_A(\lambda)$ je očito invarijantan za A.

Neka je sada $\{e_1,\dots,e_k\}$ ONB za $V_A(\lambda)$, BSO $k \neq n = \dim V$, te $\{e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n\}$ ONB za V. Tada je $\{e_{k+1},\dots,e_n\}$ ONB za $V_A(\lambda)^\perp$. Zbog dokazanog i Propozicije 5.4.12. je

$$A_{(e)} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & B \end{bmatrix} \Rightarrow (A^*)_{(e)} = (A_{(e)})^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \overline{\lambda} & \\ & & & B^* \end{bmatrix}$$

za neku matricu $B \in M_{n-k}$. Slijedi

$$\{e_1,\dots,e_k\} = V_A(\lambda) \subseteq V_{A^*}(\overline{\lambda}) \subseteq (\text{ analogno}) V_{(A^*)^*}(\overline{\overline{\lambda}}) = V_A(\lambda) \Rightarrow V_A(\lambda) = V_{A^*}(\overline{\lambda}).$$

Dokažimo zadnju tvrdnju. Neka su $x \in V_A(\lambda)$ i $y \in V_A(\mu)$, $\lambda \neq \mu$. Kako je A normalan, iz dokazanog imamo $y \in V_A(\mu) = V_{A^*}(\overline{\mu})$, pa je $A^*y = \overline{\mu}y$, te je

$$\begin{aligned} \lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x,y\rangle = \langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle = \langle x,\overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x,y\rangle &\Rightarrow (\lambda-\mu)\langle x,y\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Lema 5.4.16.2. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, $L \leq V$ takav da su L i $L^\perp$ invarijantni za A. Tada su L i $L^\perp$ invarijantni za A^* te za $A|_L : L \to L$ i $(A^*)|_L : L \to L$ vrijedi

$$(A^*)|_L = (A|_L)^*$$

Nadalje, ako je A normalan, tada je $A|_L$ normalan.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \forall x \in L, \forall y \in L^\perp, 0 = \langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle \Rightarrow A^*y \in L^\perp \Rightarrow A^*L^\perp \subseteq L^\perp, \\ 0 = \langle Ay,x\rangle = \langle y,A^*x\rangle \Rightarrow A^*x \in (L^\perp)^\perp = L \Rightarrow A^*L \subseteq L. \end{aligned}$$

Dalje, oduzmimo sljedeće prve dvije jednadžbe da dobijemo treću

$$\begin{aligned} \forall x \in L, \forall y \in L \quad & \langle Ax,y\rangle = \langle A|_L x,y\rangle = \langle x,(A|_L)^*y\rangle \\ & \langle x,A^*y\rangle = \langle x,(A^*)|_L y\rangle \qquad /- \\ & \\ & 0 = \langle x, \underbrace{(A|_L)^*y - (A^*)|_L y}_{=:w}\rangle \end{aligned}$$

Posebno $0 = \langle w,w\rangle \Rightarrow w = 0 \Rightarrow (A|_L)^*y = (A^*)|_L y$. Slijedi $(A|_L)^* = (A^*)|_L$.
Dokažimo zadnju tvrdnju: pretpostavimo da je A normalan.

$$\begin{aligned} \forall x \in V, \qquad AA^*x &= A^*Ax, \\ A(A^*)|_L x &= A^*A|_L x \\ A|_L(A^*)|_L x &= (A^*)_L A|_L x \\ \text{iz dokazanog} \quad A_L(A|_L)^*x &= (A|_L)^*A|_L x. \end{aligned}$$

Dakle $A|_L(A|_L)^* = (A|_L)^*A|_L$, pa je $A|_L$ normalan. □

Teorem 5.4.16.3 Neka je V netrivijalan konačno dimenzionalan unitaran prostor nad poljem $\mathbb{C}$, te $A \in L(V)$ normalan operator. Tada postoji ortonormirana baza e za V, takva da je $A_{(e)}$ dijagonalna matrica.

Dokaz. Indukcijom po $n = \dim V$. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Neka je $2 \leq n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za manje prirodne brojeve. Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$. Po Teoremu 4.5.9, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je f ONB za $V_A(\lambda_0)$. Ako je $V = V_A(\lambda_0)$, možemo uzeti $e = f$. Inače, po Propoziciji 5.4.16.1 $V_A(\lambda_0)^\perp$ je invarijantan za A, pa je po Lemi 5.4.16.2 $A|_{V_A(\lambda_0)^\perp}$ normalan operator i možemo koristiti pretpostavku indukcije. Neka je g ONB u kojoj se taj operator dijagonalizira. Možemo uzeti $e = f \cup g$. □

Korolar 5.4.16.4 Neka je V netrivijalan konačno dimenzionalan unitaran prostor nad poljem $\mathbb{C}$, $A \in L(V)$ je normalan operator ako i samo ako postoji ortonormirana baza e za V, takva da je $A_{(e)}$ dijagonalna matrica.

Dokaz. Jedan smjer slijedi iz Teorema 5.4.16.3, a obrat iz Propozicije 5.4.12, naime: neka je e ONB za V, takva da je $A_{(e)}$ dijagonalna matrica. Tada

$$(AA^*)_{(e)} = (A)_{(e)}(A^*)_{(e)} = (A)_{(e)}(A_{(e)})^* = (A_{(e)})^*(A_{(e)}) = (A^*)_{(e)}(A)_{(e)} = (A^*A)_{(e)}.$$

Slijedi $AA^* = A^*A$.

□

Unitarni operatori

Propozicija 5.4.16.5. Neka su V konačno dimenzionalan unitaran prostor. Ekvivalentno je

1) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V$,

2) $\langle x, A^*Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V$,

3) $A^*A = I$,

4) $AA^* = I$,

5) $A^* = A^{-1}$.

Dokaz. Iz Teorema 5.4.10 slijedi da su 1) i 2) ekvivalentne tvrdnje, a jedinstvenost hermitski adjungiranog operatora i $\langle Ix, y \rangle = \langle x, Iy \rangle$ pokazuju da iz 2) slijedi 3). Očito iz 3) slijedi 2). Korolar 4.1.13 pokazuje da su 3), 4) i 5) ekvivalentne tvrdnje. □

Propozicija 5.4.16.6. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator. Tada je A normalan. Ako je V netrivijalan i nad poljem $\mathbb{C}$, tada postoji ortonormirana baza e za V, takva da je $A_{(e)}$ dijagonalna matrica.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Propozicije 5.4.16.5 i Teorema 5.4.16.3. □

Propozicija 5.4.16.7. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator.

1) ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada je $|\lambda| = 1$.

2) $\forall \lambda, \mu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow V_A(\lambda) \perp V_A(\mu)$.

Dokaz. 1) Neka je $x \in V \setminus \{0\}$ takav da je $Ax = \lambda x$. Tada je

$$\langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

2) slijedi iz Propozicije 5.4.16.1.
Alternativno, iz 5) Propozicije 5.4.16.5, imamo $A^* = A^{-1}$.
Sada za $x \in V_A(\lambda)$ i $y \in V_A(\mu)$, $\lambda \neq \mu$, imamo:
(koristeći pokazano $\mu\overline{\mu} = |\mu|^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \overline{\mu}$, pa $Ay = \mu y \Rightarrow y = \mu A^{-1} y \Rightarrow \overline{\mu} y = A^* y$)

$$\begin{aligned} \lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle x, \overline{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle &\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Projektori

Definicija 4.1.3. Neka je V vektorski prostor, $L, M \leq V$ takvi da je $L \cap M = \{0\}$ i $L + M = V$. Dakle $V = L \dotplus M$. Za svaki $x \in V$ postoje jedinstveni $a \in L$ i $b \in M$ takvi da je $x = a + b$. Preslikavanje

$$P : V \to V, \quad Px = a,$$

se zove projektor na potprostor L u smjeru potporstora M.

Uočimo: ako je $P \in L(V)$ projektor na L u smjeru M, tada je $L = \mathrm{Im}P$ i $M = \mathrm{Ker}P$. Također, $I - P$ projektor na M u smjeru L.

Definicija 5.2.23. Ako je V konačno dimenzionalan unitaran prostor i $P \in L(V)$ projektor na potprostor L u smjeru potprostora M, pri čemu su L i M okomiti, tada za P kažemo da je ortogonalan projektor na potprostor L.
Napomena: $M = L^\perp$ je jedinstveno određen.

Dokažimo jednostavnu tvrdnju:
Lema 5.2.23. Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor, $A \in L(V)$, ortogonalan projektor na potprostor M i $e = \{e_1, \ldots, e_k\}$ ortonormirana baza za M, tada je $Px = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i\rangle e_i$.

Dokaz. Definirajmo $Q : V \to V$ formulom $Q(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i\rangle e_i$. Svaki $\langle x, e_i\rangle e_i$ je linearan operator u x, pa je onda i njihova suma, odnosno Q linearan operator. Dalje, za svaki $j = 1, \ldots, k$ je $P(e_j) = e_j = Q(e_j)$. Ako je $k = \dim V$ imamo jednako djelovanje operatora na bazi, pa su oni jednaki. Ako je $k \neq \dim V$, proširimo e do $f = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ ONB za V. Za svaki $j = k+1, \ldots, n$ je $P(e_j) = 0 = Q(e_j)$. Dakle, P i Q djeluju jednako na f, pa su jednaki. □

Propozicija 5.5.2 Neka je V konačno dimenzionalan prostor, te $P \in L(V)$. Vrijedi

1) P je projektor ako i samo ako je $P^2 = P$.

2) ako je V unitaran, P je ortogonalan projektor ako i samo ako je $P^2 = P = P^*$.

Dokaz. 1) Neka je P projektor na L u smjeru M.

$$\forall m \in M, \forall l \in L, \quad P^2(l+m) = P(l) = P(l+m) \Rightarrow P^2 = P.$$

Obratno, pretpostavimo $P^2 = P$.

$$y \in \text{Ker P} \cap \text{Im } P \Rightarrow \exists x \in V, y = Px \Rightarrow 0 = Py = P^2x = Px = y.$$

Dakle $\text{Ker P} \cap \text{Im } P = \{0\}$, pa zbog $d(P) + r(P) = \dim V$ vrijedi $V = \text{Ker P} \dot{+} \text{Im } P$.

Također: $y \in \text{Im } P \Rightarrow \exists x \in V, y = Px \Rightarrow Py = P^2x = Px = y$.

Slijedi P je projektor, na Im P, u smjeru Ker P.

2) Neka je P ortogonalan projektor. Imamo $V = \text{Ker P} \oplus \text{Im } P$. Neka su $x, y \in V$, te $a, c \in \text{Ker P}$ i $b, d \in \text{Im P}$ takvi da je $x = a + b$ i $y = c + d$. Tada je

$$\langle Px, y \rangle = \langle b, c+d \rangle = \langle b, d \rangle = \langle a+b, d \rangle = \langle x, Py \rangle$$

Slijedi $P = P^*$. Obratno, neka je $P^2 = P = P^*$. Iz 1) znamo da je P projektor na Im P, u smjeru Ker P. Iz Propozicije 5.4.14, zbog $P = P^*$, imamo $V = \text{Ker P} \oplus \text{Im } P$. Dakle P je ortogonalan projektor. □