Matematika 1 za kemičare

rješenje 5. zadatka s pismenog ispita 31. siječnja 2024.

Franka Miriam Brückler

5. (4+4+4+8)

(a) *Baza ravnine $\{\vec{a},\vec{b}\}$ zadana je parametrima $a = b\sqrt{2}$, $b = \pi$ cm, $\gamma = 45°$. Odredite jednadžbu koja povezuje koordinate $[x, y]$ svih vektora okomitih na vektor $[2, 5]$, gdje se koordinate odnose na bazu $\{\vec{a},\vec{b}\}$.*

$$[x, y] \perp [2, 5] \Leftrightarrow 0 = [x, y] \cdot [2, 5] \Leftrightarrow 0 = (x\vec{a} + y\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 5\vec{b}) \Leftrightarrow$$

$$0 = 2x\,a^2 + 5y\,b^2 + (2y + 5x)a\,b\cos\gamma = 4x\,b^2 + 5y\,b^2 + (2y + 5x)b^2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 9x + 7y$$

(b) *Neka je $\vec{c} = \frac{1}{1\,\mathrm{cm}}\,\vec{a} \times \vec{b}$. Izračunajte mješoviti produkt $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.*

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Budući da je $\vec{c}$ okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i ima iznos $c = \frac{1}{1\,\mathrm{cm}}\,a\,b\sin\gamma = \pi^2\,\mathrm{cm}$, slijedi da je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = a\,b\,c\sin\gamma = \pi^4\,\mathrm{cm}^3 = V$.

(c) *Ako jednadžbu iz (a) dijela zadatka shvatite kao jednadžbu u prostoru (s obzirom na koordinatni sustav zadan odabranim ishodištem i bazom $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$), predstavlja li ta jednadžba pravac ili ravninu u prostoru?*

(i) *Ako predstavlja pravac, onda odredite Millerove indekse smjer(ov)a mrežnih ravnina okomitih na njega.*

(ii) *Ako predstavlja ravninu, navedite koordinate triju nekolinearnih točaka u toj ravnini (argumentirajte zašto ste sigurni da nisu kolinearne) i jedan vektor normale te ravnine.*

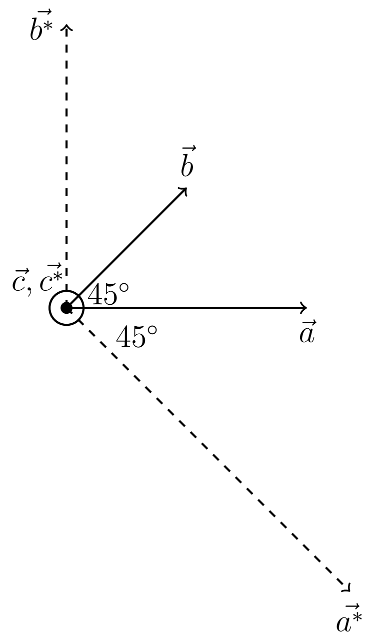
$9x + 7y = 0$ je u prostoru jednadžba ravnine koja sadrži ishodište i paralelna je z-osi, dakle koja sadrži z-os te tri nekolinearne točke možemo uzeti tako da su dvije na z-osi, recimo $O = (0, 0, 0)$ i $A = (0, 0, 1)$, a treća da je u presjeku s (x, y)-ravninom i nije O, recimo $B = (-7, 9, 0)$. Jedna normala joj je $\vec{n} = [9, 7, 0]^*$.

(d) *Izračunajte iznose* a^*, b^*, c^* *vektorâ* $\vec{a*}$, $\vec{b^*}$ *i* $\vec{c^*}$ *te kutove* $\alpha^* = \angle(\vec{b^*}, \vec{c^*})$, $\beta^* = \angle(\vec{c^*}, \vec{a^*})$, $\gamma^* = \angle(\vec{a^*}, \vec{b^*})$. *Je li koji od vektora* $\vec{a*}$, $\vec{b^*}$ *i* $\vec{c^*}$ *istog smjera kao neki od vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

Uočimo da je $\vec{c}$ okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a takav je po definiciji i $\vec{c^*}$, dakle je $\alpha = \beta = 90°$, a $\vec{c}$ i $\vec{c^*}$ su istog smjera. Nadalje,

$$a^* = \frac{b\,c\sin\alpha}{V} = \frac{1}{\pi\,\mathrm{cm}}, \quad b^* = \frac{a\,c\sin\beta}{V} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\,\mathrm{cm}}, \quad c^* = \frac{a\,b\sin\gamma}{V} = \frac{1}{\pi^2\,\mathrm{cm}}$$

Također, $\vec{b^*}$ je smjera kao $\vec{c} \times \vec{a}$ i $\vec{a^*}$ je smjera kao $\vec{b} \times \vec{c}$ pa imamo:



Vidimo da je $\alpha^* = 90°$, $\beta^* = 90°$, $\gamma^* = 3 \cdot 45° = 135°$.