

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 ($16 = 13 + 3$ bodova)

(a) Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav

$$3x - y - z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$x + y - 3z = 0$$

$$2x - 3y + 4z = 0.$$

(b) Skup svih rješenja homogenog sustava iz zadatka (a) potprostor je od \mathbb{R}^3 . Navedite jednu njegovu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 2 (15 bodova)

Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$(\det A) \cdot (A^{-1} + B) A.$$

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 3 (17 = 6 + 11 bodova)

Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) := (x + y + z, y + z, z).$$

- (a) Nađite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu prostora \mathbb{R}^3 .
- (b) Ispitajte pomoću ranga je li

$$f := ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0))$$

(uređena) baza prostora \mathbb{R}^3 i, ako jest, nađite matricu operatora A s obzirom na tu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 4 (*12 bodova*)

Sestre Anja, Sanja i Vanja imaju ukupno 50 godina. Prije 12 godina Sanja je imala dvaput više godina nego što je tada imala Anja i dvaput manje godina nego što je tada imala Vanja. Koliko godina ima koja sestra?

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 5 (20 = 6 + 8 + 6 bodova)

Tetragonske kristalne strukture opisuju se koristeći kristalografsku bazu čiji su vektori međusobno okomiti, a prva dva su iste duljine (različite od duljine trećeg baznog vektora). Za neku tetragonsku kristalnu strukturu se među operatorima simetrije nalaze i operatori čije su matrice obzirom na kristalografsku bazu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) O kakvim se operatorima simetrije radi, tj. što primjena pojedinog operatora „radi” radij-vektorima prostora?
- (b) Skicirajte skup fiksnih točaka operatora \hat{A} opisanog matricom A . Fiksne točke operatora \hat{A} su točke čiji radij-vektori v imaju svojstvo $\hat{A}v = v$. Temeljem toga skicirajte (na istoj slici) i linearno nezavisan skup svojstvenih vektora operatora \hat{A} koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 1, a da pritom taj skup ima najveći mogući broj elemenata.
- (c) Izračunajte ABC . Koji je efekt djelovanja tog operatora?

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 ($16 = 13 + 3$ bodova)

(a) Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav

$$x - y - z = 0$$

$$x + y - 3z = 0$$

$$3x - 2y - 4z = 0$$

$$x - 3y + z = 0.$$

(b) Skup svih rješenja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ homogenog sustava iz zadatka (a) potprostor je od \mathbb{R}^3 . Navedite jednu njegovu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 2 (15 bodova)

Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$(\det A) \cdot A(A^{-1} + B).$$

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 3 (17 = 6 + 11 bodova)

Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) := (x + y + z, x + y, x).$$

- (a) Nađite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu prostora \mathbb{R}^3 .
- (b) Ispitajte pomoću ranga je li

$$f := ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$$

(uređena) baza prostora \mathbb{R}^3 i, ako jest, nađite matricu operatora A s obzirom na tu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 4 (*12 bodova*)

Braća Branimir, Krešimir i Zvonimir imaju ukupno 40 godina. Prije 9 godina Krešimir je imao triput više godina nego što je tada imao Branimir i triput manje godina nego što je tada imao Zvonimir. Koliko godina ima koji brat?

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 5 (20 = 6 + 8 + 6 bodova)

Heksagonske kristalne strukture opisuju se koristeći kristalografsku bazu u kojoj su prva dva vektora iste duljine i pod kutom od 120° , a treći bazni vektor je okomit na prva dva. Za neku heksagonsku kristalnu strukturu se među operatorima simetrije nalaze i operatori čije su matrice obzirom na kristalografsku bazu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) O kakvim se operatorima simetrije radi, tj. što primjena pojedinog operatora „radi” radij-vektorima prostora?
- (b) Skicirajte skup fiksnih točaka operatora \hat{A} opisanog matricom A . Fiksne točke operatora \hat{A} su točke čiji radij-vektori v imaju svojstvo $\hat{A}v = v$. Temeljem toga skicirajte (na istoj slici) i linearno nezavisan skup svojstvenih vektora operatora \hat{A} koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 1, a da pritom taj skup ima najveći mogući broj elemenata.
- (c) Izračunajte ABC . Koji je efekt djelovanja tog operatora?

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 ($16 = 13 + 3$ bodova)

(a) Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav

$$\begin{aligned}x - y - 3z &= 0 \\3x + 2y - 4z &= 0 \\x + 3y + z &= 0 \\x + y - z &= 0.\end{aligned}$$

(b) Skup svih rješenja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ homogenog sustava iz zadatka (a) potprostor je od \mathbb{R}^3 . Navedite jednu njegovu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 2 (15 bodova)

Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$(\det A) \cdot A(B + A^{-1}).$$

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 3 ($17 = 6 + 11$ bodova)

Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) := (x, x + y, x + y + z).$$

- (a) Nađite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu prostora \mathbb{R}^3 .
- (b) Ispitajte pomoću ranga je li

$$f := ((0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$$

(uređena) baza prostora \mathbb{R}^3 i, ako jest, nađite matricu operatora A s obzirom na tu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 4 (*12 bodova*)

Sestre Lara, Sara i Zara imaju ukupno 60 godina. Prije 16 godina Lara je imala dvaput manje godina nego što je tada imala Sara i triput manje godina nego što je tada imala Zara. Koliko godina ima koja sestra?

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 5 ($20 = 6 + 8 + 6$ bodova)

Tetragonske kristalne strukture opisuju se koristeći kristalografsku bazu čiji su vektori međusobno okomiti, a prva dva su iste duljine (različite od duljine trećeg baznog vektora). Za neku tetragonsku kristalnu strukturu se među operatorima simetrije nalaze i operatori čije su matrice obzirom na kristalografsku bazu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) O kakvim se operatorima simetrije radi, tj. što primjena pojedinog operatora „radi” radij-vektorima prostora?
- (b) Skicirajte skup fiksnih točaka operatora \hat{A} opisanog matricom A . Fiksne točke operatora \hat{A} su točke čiji radij-vektori v imaju svojstvo $\hat{A}v = v$. Temeljem toga skicirajte (na istoj slici) i linearno nezavisan skup svojstvenih vektora operatora \hat{A} koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 1, a da pritom taj skup ima najveći mogući broj elemenata.
- (c) Izračunajte ABC . Koji je efekt djelovanja tog operatora?

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 ($16 = 13 + 3$ bodova)

(a) Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav

$$2x - 3y - 4z = 0$$

$$3x - y + z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

$$x + y + 3z = 0.$$

(b) Skup svih rješenja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ homogenog sustava iz zadatka (a) potprostor je od \mathbb{R}^3 . Navedite jednu njegovu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 2 (15 bodova)

Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$(\det A) \cdot (B + A^{-1}) A.$$

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 3 (17 = 6 + 11 bodova)

Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) := (z, y + z, x + y + z).$$

- (a) Nađite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu prostora \mathbb{R}^3 .
- (b) Ispitajte pomoću ranga je li

$$f := ((1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$$

(uređena) baza prostora \mathbb{R}^3 i, ako jest, nađite matricu operatora A s obzirom na tu bazu.

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 4 (*12 bodova*)

Braća Ratko, Vlatko i Zlatko imaju ukupno 50 godina. Prije 13 godina Zlatko je imao dvaput više godina nego što je tada imao Vlatko i triput više godina nego što je tada imao Ratko. Koliko godina ima koji brat?

Matematika 2 za kemičare

Prvi kolokvij - 23. travnja 2016.

Zadatak 5 (20 = 6 + 8 + 6 bodova)

Heksagonske kristalne strukture opisuju se koristeći kristalografsku bazu u kojoj su prva dva vektora iste duljine i pod kutom od 120° , a treći bazni vektor je okomit na prva dva. Za neku heksagonsku kristalnu strukturu se među operatorima simetrije nalaze i operatori čije su matrice obzirom na kristalografsku bazu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) O kakvim se operatorima simetrije radi, tj. što primjena pojedinog operatora „radi” radij-vektorima prostora?
- (b) Skicirajte skup fiksnih točaka operatora \hat{A} opisanog matricom A . Fiksne točke operatora \hat{A} su točke čiji radij-vektori v imaju svojstvo $\hat{A}v = v$. Temeljem toga skicirajte (na istoj slici) i linearno nezavisan skup svojstvenih vektora operatora \hat{A} koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 1, a da pritom taj skup ima najveći mogući broj elemenata.
- (c) Izračunajte ABC . Koji je efekt djelovanja tog operatora?