

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2025.

**Zadatak 1.** (*ukupno 12 bodova*)

(a) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{e^x - 2}{e^x - 1}\right)$$

(b) Odredite sliku funkcije  $f$ .

(c) Je li  $f$  bijekcija na svoju sliku?

*Rješenje.*

(a) Uvjeti na domenu su:

- $e^x - 1 \neq 0$
- $\frac{e^x - 2}{e^x - 1} \in [-1, 1]$

Iz prvog uvjeta dobije se  $x \neq 0$ , a iz drugog

- (i)  $\frac{e^x - 2}{e^x - 1} \geq -1$ , tj.  $\frac{2e^x - 3}{e^x - 1} \geq 0$ , pa je  $x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup [\ln \frac{3}{2}, +\infty)$ .
- (ii)  $\frac{e^x - 2}{e^x - 1} \leq 1$ , tj.  $\frac{-1}{e^x - 1} \leq 0$ , pa je  $x > 0$ .

Konačno,  $x \in [\ln \frac{3}{2}, +\infty)$ .

(b) Zapišimo  $f$  kao kompoziciju  $f = g \circ h \circ l$ , where

$$\begin{aligned} l : \mathcal{D}_f &\rightarrow \mathbb{R}, & l(x) &= e^x, \\ h : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R}, & h(x) &= \frac{x - 2}{x - 1}, \\ g : [-1, 1] &\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], & g(x) &= \arcsin x. \end{aligned}$$

Budući da je  $e^x$  rastuća funkcija,  $l(\mathcal{D}_f) = [\frac{3}{2}, +\infty)$ . Funkciju  $h$  možemo zapisati kao  $h(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$ , pa vidimo da je strogo rastuća na  $\langle 1, +\infty \rangle$  te joj je vrijednost strogo manja od 1. Slijedi da je  $h(l(\mathcal{D}_f)) = [-1, 1)$ .

Konačno, funkcija  $\arcsin$  je strogo rastuća, pa je  $f(\mathcal{D}_f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

(c) Budući da su funkcije  $g$  i  $l$  strogo rastuće te je  $h$  strogo rastuća na  $l(\mathcal{D}_f)$ , slijedi da je i  $f$  strogo rastuća funkcija, pa je injektivna. Dakle,  $f$  je bijekcija na svoju sliku.

**Česte pogreške:** Ako množimo izraz s  $e^x - 1$ , moramo razmišljati o predznaku, studenti koji su automatski pretpostavili pozitivnost izgubili su 2 boda.

**Zadatak 2.** (ukupno 12 bodova) Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s  $f(x) = |x^2 - x|$ . Odredite najveći interval  $I \subset \mathbb{R}$  takav da vrijedi  $\frac{1}{4} \in I$  i da je  $f|_I$  injekcija. Odredite  $f|_I^{-1}$ .

*Rješenje.* Zapišimo  $f = f_2 \circ f_1$ , gdje je

$$f_1(x) = x^2 - x \quad \text{i} \quad f_2(x) = |x|.$$

Najveći interval koji sadrži  $\frac{1}{4}$ , na kojem je funkcija  $f_1$  injekcija je  $\langle -\infty, \frac{1}{2}]$ . Naime, budući da je

$$f_1(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4},$$

funkcija  $f_1$  je padajuća na tom intervalu pa je na njemu injekcija. Nadalje, za svaki  $\delta > 0$  vrijedi

$$f_1(\frac{1}{2} + \delta) = f_1(\frac{1}{2} - \delta)$$

pa funkcija  $f_1$  nije injekcija niti na jednom nadskupu tog intervala, a stoga ni  $f$  sigurno nije injekcija niti na jednom nadskupu tog intervala.

Primijetimo da je

$$f_1(\langle -\infty, \frac{1}{2}]) = [-\frac{1}{4}, +\infty).$$

Budući da je  $f_1(\frac{1}{4}) = -\frac{3}{16}$  i da je i da je  $f_2$  injekcija na  $[-\frac{1}{4}, 0]$ , slijedi da je  $f$  injekcija na intervalu

$$(f_1|_{\langle -\infty, \frac{1}{2}])^{-1}([-\frac{1}{4}, 0]) = [0, \frac{1}{2}]$$

kao kompozicija injekcija. Dokažimo da je to ujedno i najveći takav interval. Naime, primijetimo da je

$$f\left([0, \frac{1}{2}]\right) = [0, \frac{1}{4}].$$

S druge strane, za  $\delta \in \langle 0, \frac{1}{10} \rangle$  vrijedi

$$f(-\delta) = \delta^2 + \delta \in [0, \frac{11}{100}] \subset [0, \frac{1}{4}]$$

pa funkcija ne može biti injekcija niti na jednom intervalu koji sadrži  $-\delta$  za bilo koji  $\delta \in \langle 0, \frac{1}{10} \rangle$ . Dakle,

$$I = [0, \frac{1}{2}]$$

je najveći takav interval.

Računamo inverz. Primijetimo da je  $f|_{[0, \frac{1}{2}]} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, \frac{1}{4}]$  zadana s

$$f|_{[0, \frac{1}{2}]}(x) = x - x^2.$$

Inverz tražimo rješavanjem  $x - x^2 = y$ , iz čega slijedi

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y}}{2}.$$

Rješenje u intervalu  $[0, \frac{1}{2}]$  ima negativan predznak ispred zagrade pa vrijedi

$$f|_{[0, \frac{1}{2}]}^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y}}{2}$$

**Zadatak 3.** (ukupno 13 bodova)

- (a) Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana je s  $f(x) = \lfloor 2 \sin x + 1 \rfloor$ . Odredite  $f^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}])$ .
- (b) Dokažite da postoji beskonačno mnogo funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju  $f(0) = 0$  i takvih da za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $f(x+1) = f(x) + 1$ .

*Rješenje.*

- (a) Zapišimo funkciju kao kompoziciju  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , gdje su  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadane s

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = 2x + 1, \quad f_3(x) = \lfloor x \rfloor.$$

Tada je

$$f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]\right) = f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(f_3^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]\right)\right)\right).$$

Računamo:

$$f_3^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]\right\} = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}\} = [0, 2).$$

Nadalje

$$f_2^{-1}([0, 2)) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Konačno

$$f_1^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] + 2k\pi \right)$$

- (b) Neka je  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljna 1-periodična funkcija takva da je  $g(0) = 0$ . Tada funkcija

$$f(x) = g(x) + x$$

zadovoljava

$$f(x+1) = g(x+1) + (x+1) = (g(x) + x) + 1 = f(x) + 1$$

i vrijedi  $f(0) = g(0) + 0 = 0$ . Dakle, preostaje pokazati da postoji beskonačno mnogo 1-periodičnih funkcija  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takvih da je  $g(0) = 0$ . Međutim, primijetimo da je za proizvoljan  $c \in \mathbb{R}$  sljedeća funkcija

$$g(x) = \begin{cases} c, & x - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

1-periodična i vrijedi  $g(0) = 0$ .

**Zadatak 4.** (ukupno 13 bodova)

(a) Pronađite sva realna rješenja jednadžbe

$$x^2 + \ln(x^2) = 1.$$

(b) Dokažite da postoji surjekcija  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  takva da je praslika svake točke  $k \in \mathbb{Z}$  skup koji sadrži točno dva različita elementa.

*Rješenje.*

(a) 1. rješenje: Pronađimo sva rješenja jednadžbe

$$y + \ln y = 1, \quad y > 0.$$

Očito je jedno rješenje  $y = 1$ , pokažimo da je to i jedino rješenje.

Pretpostavimo da je  $y > 1$  rješenje. Tada je  $\ln y > 0$  te je

$$1 = y + \ln y > y > 1,$$

što je kontradikcija. Analogno, ne može biti  $y < 1$ . Dakle,  $y = 1$  je jedino rješenje, pa je rješenje polazne jednadžbe  $x = \pm 1$ .

2. rješenje: Budući da su funkcije  $y$  i  $\ln y$  strogo rastuće za  $y \in \langle 0, \infty \rangle$ , pa je i njihova suma strogo rastuća, te da je  $x^2$  strogo rastuća na  $\langle 0, \infty \rangle$ , a strogo padajuća na  $\langle -\infty, 0 \rangle$ , slijedi da je funkcija  $x^2 + \ln(x^2)$  strogo rastuća na  $\langle 0, \infty \rangle$ , a strogo padajuća na  $\langle -\infty, 0 \rangle$ , pa je na svakom od tih intervala injekcija.

Provjerom vidimo da je  $x = 1$  i  $x = -1$  rješenje, pa su to jedina rješenja.

3. rješenje: Pokažimo da je  $y + \ln y$  injektivna funkcija, pa će pronađeno rješenje uistinu biti i jedino rješenje. Neka su  $y_1, y_2 > 0$ ,  $y_1 < y_2$  takvi da je

$$y_1 + \ln y_1 = y_2 + \ln y_2,$$

tj.

$$y_1 - y_2 = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

No, sada je lijeva strana jednakosti strogo manja od 0, a desna strana strogo veća, pa smo dobili kontradikciju. Dakle, funkcija je zaista injekcija.

Slijedi da je rješenje polazne jednadžbe  $x = \pm 1$ .

(b) Postoji, možemo uzeti funkciju

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Sada je  $f^{-1}(\{k\}) = \{2k, 2k+1\}$ , za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  i funkcija je očito surjektivna.

**Česte pogreške:** Injektivnost funkcije  $y + \ln y$  slijedi iz strogog rasta, tj. strogog pada, no suma injekcija (koje nisu strogo monotone) ne mora biti injekcija.

Također, suma neperiodičkih funkcija ne mora biti neperiodička.