

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Četvrti ispit – 11. rujna 2026.

Zadatak 1. (12+12=24 boda)

(a) Odredite globalne ekstreme (ako postoje) funkcije $f : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

(b) Dokažite da za svaki $x > 0$ vrijedi

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Za $x > 1$ je $x > 0$ i $(x-1)^2 > 0$, pa je predznak od f' jednak predznaku od $x-2$:

$$f'(x) < 0 \text{ na } \langle 1, 2 \rangle, \quad f'(2) = 0, \quad f'(x) > 0 \text{ na } \langle 2, +\infty \rangle.$$

Dakle, f strogo pada na $\langle 1, 2 \rangle$, a strogo raste na $[2, +\infty)$, pa u točki $x = 2$ postiže globalni minimum

$$f(2) = \frac{4}{1} = 4.$$

Nadalje, zbog

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

vidimo da f nema maksimum.

(b) Neka je $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x)$ za $x \geq 0$. Tada je $g(0) = 0$ i

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{(1+x)^{3/2}} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1 + \frac{x}{2}) - \sqrt{1+x}}{(1+x)^{3/2}}.$$

Kako je $(1 + \frac{x}{2})^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} > 1 + x$ i $1 + \frac{x}{2} > 0$, vrijedi $1 + \frac{x}{2} > \sqrt{1+x}$ za svaki $x > 0$, pa je $g'(x) > 0$. Dakle, g je strogo rastuća na $[0, +\infty)$, pa je $g(x) > g(0) = 0$, tj. $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

Zadatak 2. (16+8=24 boda)

(a) Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^x.$$

(b) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna funkcija za koju postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Dokažite da postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $f'(c) = 0$.*Rješenje.*(a) Za $x > 1$ je $\frac{x+3}{x-1} > 0$, pa je izraz dobro definiran i možemo ga zapisati kao

$$\left(\frac{x+3}{x-1} \right)^x = \exp \left(x \ln \frac{x+3}{x-1} \right)$$

Zbog neprekidnosti eksponencijalne funkcije dovoljno je izračunati

$$\Lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}},$$

L'Hospitalovo pravilo daje

$$\Lambda \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-4}{(x+3)(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\left(1 + \frac{3}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 4.$$

Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^x = e^4.$$

Napomena. Isti se limes može izračunati i bez L'Hospitalovog pravila, svođenjem na $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$:

$$\left(\frac{x+3}{x-1} \right)^x = \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^x = \left[\left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4}} \right]^{\frac{4x}{x-1}} \longrightarrow e^4.$$

(b) Ako je f konstantna, tj. $f \equiv L$, tvrdnja je očita jer je tada $f'(c) = 0$ za svaki $c \in \mathbb{R}$.Pretpostavimo stoga da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) \neq L$. Zamijenimo li po potrebi f s $-f$ (koja je također derivabilna i ima limese $-L$ u $\pm\infty$), možemo pretpostaviti da je $f(a) > L$. Stavimo

$$\varepsilon = \frac{f(a) - L}{2} > 0.$$

Iz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ slijedi da postoji $A < a$ takav da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, dakle

$$f(x) < L + \varepsilon < L + 2\varepsilon = f(a), \quad \forall x \leq A.$$

Analogno, iz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ slijedi da postoji $B > a$ takav da je $f(x) < f(a)$ za svaki $x \geq B$.Funkcija f je derivabilna, dakle i neprekidna, pa po teoremu o ekstremnim vrijednostima postiže maksimum na segmentu $[A, B]$ u nekoj točki $c \in [A, B]$. Kako je $a \in \langle A, B \rangle$, vrijedi

$$f(c) \geq f(a) > f(A) \quad \text{i} \quad f(c) \geq f(a) > f(B),$$

pa je $c \neq A$ i $c \neq B$, tj. $c \in \langle A, B \rangle$. Dakle, f u točki c ima lokalni maksimum, pa je po Fermatovom teoremu $f'(c) = 0$.

Alternativno rješenje (svođenje na Rolleov teorem). Tvrdnja je zapravo Rolleov teorem u kojem je segment zamijenjen cijelim pravcem, pa je možemo dokazati tako da pravac „sažmemo” u segment. Neka je

$$\varphi : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Funkcija φ je derivabilna i vrijedi

$$\varphi'(x) = \frac{(1-x^2) + x \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

te

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \varphi(x) = -\infty.$$

Definirajmo $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$g(x) = \begin{cases} f(\varphi(x)), & x \in \langle -1, 1 \rangle, \\ L, & x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Provjerimo pretpostavke Rolleovog teorema.

- Na $\langle -1, 1 \rangle$ je g neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija, a u rubnim točkama zbog

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = L = g(1), \quad \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = L = g(-1),$$

gdje smo iskoristili $\varphi(x) \rightarrow \pm\infty$ kad $x \rightarrow \pm 1$. Dakle, g je neprekidna na segmentu $[-1, 1]$.

- Na otvorenom intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ je g derivabilna kao kompozicija derivabilnih funkcija i vrijedi $g'(x) = f'(\varphi(x)) \varphi'(x)$.
- $g(-1) = g(1) = L$.

Po Rolleovom teoremu postoji $\xi \in \langle -1, 1 \rangle$ takav da je

$$0 = g'(\xi) = f'(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi).$$

Kako je $\varphi'(\xi) > 0$, slijedi $f'(c) = 0$ uz $c = \varphi(\xi)$.

Napomena. Umjesto φ može poslužiti bilo koja derivabilna bijekcija s $\langle -1, 1 \rangle$ na $\mathbb{R}$ kojoj derivacija nigdje ne iščezava, primjerice $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Zadatak 3. (16+10=26 bodova)

(a) Odredite integral

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x^3}} dx$$

(b) Neka je $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da nepravi integral $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergira. Dokažite da nepravi integral

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

također konvergira.

Rješenje.

(a) Najprije zapišemo podintegralnu funkciju u pogodnijem obliku:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Integral ćemo izračunati uvođenjem supstitucije $t := \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} dx &= \left[\begin{array}{lll} t = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} & t^2 = 1 + \frac{1}{x} & x = \frac{1}{t^2 - 1} \\ & dx = -\frac{2t dt}{(t^2 - 1)^2} & \end{array} \right] = \int t(t^2 - 1) \left(-\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} \right) dt \\ &= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = -2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} \\ &= -2t - \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Vraćanjem supstitucije dobivamo konačno rješenje

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x^3}} dx = -2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \right| + C.$$

(b) Budući da $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergira, funkcija

$$F(x) := \int_x^\infty f(t) dt$$

je dobro definirana i zadovoljava $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Također, vrijedi $F'(x) = -f(x)$.

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_1^R \frac{f(x)}{x} dx = - \int_1^R \frac{F'(x)}{x} dx = - \frac{F(x)}{x} \Big|_1^R - \int_1^R \frac{F(x)}{x^2} dx = -\frac{F(R)}{R} + F(1) - \int_1^R \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Kako je $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, funkcija F je ograničena, tj. postoji $M > 0$ takav da

$$\left| \int_1^\infty \frac{F(x)}{x^2} dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{|F(x)|}{x^2} dx \leq M \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty.$$

Nadalje, vrijedi $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{F(R)}{R} = 0$. Stoga je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{f(x)}{x} dx < \infty.$$

Zadatak 4. (12+14=26 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

(b) Odredite Maclaurinov red funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ i njegov radijus konvergencije te izračunajte $f^{(2026)}(0)$.

Rješenje.

(a) Označimo

$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Konvergencija. Primijetimo da je

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0.$$

Iz zadnjeg zapisa je očito da je niz $(a_n)_n$ strogo padajuć (nazivnik strogo raste) te da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Po Leibnizovom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira.

Apsolutna konvergencija. Primijetimo da za niz parcijalnih suma vrijedi

$$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \sqrt{N+1} - 1 \rightarrow +\infty.$$

Dakle, zadani red ne konvergira apsolutno.

(b) Rastavom na parcijalne razlomke iz $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}.$$

Za $|x| < 1$ je

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

a za $|x| < 2$ je

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

Oba razvoja vrijede za $|x| < 1$, pa oduzimanjem slijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n, \quad |x| < 1.$$

Po teoremu o jedinstvenosti razvoja u red potencija to je Maclaurinov red funkcije f . Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 1$, vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pa je radijus konvergencije

$$R = 1.$$

Konačno, koeficijent uz x^{2026} jednak je $\frac{f^{(2026)}(0)}{2026!}$, pa je

$$f^{(2026)}(0) = 2026! \left(1 - \frac{1}{2^{2027}} \right).$$

Napomena. Općenito je $f^{(n)}(0) = n! \left(1 - 2^{-(n+1)} \right)$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$; provjera za $n = 0$ daje $f(0) = \frac{1}{2}$, a za $n = 1$ daje $f'(0) = \frac{3}{4}$, što se lako potvrdi izravnim deriviranjem.