MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pismeni ispit – 25. lipnja 2025.

Zadatak 1. (24 bodova) Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{2(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Je li f neprekidna na $\mathbb{R}$? A derivabilna? Klase C^1?

Rješenje. Vidimo da je f neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Provjeravamo neprekidnost u 0:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sh} x}{2x} = 1.$$

S obzirom da je $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, slijedi da je f neprekidna u 0, i time na cijelom $\mathbb{R}$.

Također vidimo da je f derivabilna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ te provjeravamo derivabilnost u 0:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x - x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{\cos x - 1}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{2} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - x^2}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sh} x - 2x}{3x^2}$$
$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{ch} x - 2}{6x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sh} x}{6} = 0.$$

Slijedi da je f derivabilna u 0 i $f'(0) = 0$. Time je i f derivabilna na $\mathbb{R}$.

Provjeravamo je li f' neprekidna:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$
$$\left(\frac{2(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2}\right)' = \frac{2x^2 \operatorname{sh} x - 4x(\operatorname{ch} x - 1)}{x^4} = \frac{2x\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x + 4}{x^3},$$
$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{2} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2x\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x + 4}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sh} x + 2x\operatorname{ch} x - 4\operatorname{sh} x}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2x\operatorname{ch} x - 2\operatorname{sh} x}{3x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{ch} x + 2x\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}{6x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sh} x}{3} = 0$$

Slijedi da je f' neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$, tj. f' je neprekidna na $\mathbb{R}$. Dakle, f je klase C^1 na $\mathbb{R}$.

Zadatak 2. (24 bodova)

(a) Dokažite da za sve $x \in [0,1]$ vrijedi
$$\arcsin x \geq x + \frac{x^3}{6}$$

(b) Neka je $f \in C^3(\mathbb{R})$ funkcija takva da je $f'''(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Koliko najviše lokalnih ekstrema može imati funkcija f?

Rješenje.

(a) Označimo $f(x) := \arcsin x - x - \frac{x^3}{6}$. Tada za sve $x \in [0,1)$ vrijedi:
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 - \frac{x^2}{2}, \quad f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - x = x\left(\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right) \geq 0.$$

Kako je $f''(x) \geq 0$ za $x \in [0,1)$, slijedi da je f' rastuća pa kako je $f'(0) = 0$, slijedi da je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in [0,1)$. Dakle, po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti slijedi da je i funkcija f rastuća na $[0,1]$ pa kako je $f(0) = 0$, slijedi da je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in [0,1]$, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

Alternativno rješenje. Iz službenih formula pročitamo da za $|x| < 1$ vrijedi:
$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \geq x + \frac{x^3}{6},$$

gdje smo kod posljednje nejednakosti koristili činjenicu da su svi članovi reda nenegativni. Konačno, preostaje provjeriti točku $x = 1$ (jer nismo dokazali konvergenciju reda u točki $x = 1$). Međutim, za $x = 1$ vrijedi:
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} > 1 + \frac{1}{6}$$
pa je time tvrdnja dokazana.

(b) Ako je točka x_0 lokalni ekstrem, po teoremu s predavanja vrijedi $f'(x_0) = 0$. Kad bi $f'(x)$ imala 3 različite nultočke: x_1, x_2, x_2, tada bi po Rolleovom teoremu primijenjenom na f' slijedilo da funkcija f'' ima barem 2 nultočke $y_1 \in (x_1, x_2)$, $y_2 \in (x_2, x_3)$ pa bi još jednom primjenom Rolleovog teorema slijedilo da f''' ima nultočku $z \in (y_1, y_2)$, što je kontradikcija sa uvjetom zadatka. Dakle, f' može imati najviše 2 nultočke pa f ima najviše 2 ekstrema. Primjer funkcije sa 2 ekstrema za koju vrijedi $f''' > 0$ je $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$. Naime, $f'''(x) = 6$, a $f'(x) = 0$ za $x \in \{0, \pm 1/\sqrt{3}\}$. Kako je $f''(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm 2\sqrt{3}$, jedna točka je lokalni minimum, a druga lokalni maksimum.

Zadatak 3. (26 bodova)

(a) Odredite sve $\alpha > 0$ za koje sljedeći nepravi integral konvergira

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Postoji li neprekidna funkcija $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ takva da niz $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ raste u $+\infty$, a za koju nepravi integral $\int_0^\infty f(x)dx$ konvergira?

Rješenje.

(a) Koristeći $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, zaključujemo da za sve $x \in [0,1]$ vrijedi:

$$1 - x \leq (1-x^2) \leq 2(1-x).$$

Odatle slijedi

$$\int_0^1 \frac{1}{2^\alpha(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Dakle, po usporednom kriteriju traženi integral konvergira ako i samo ako konvergira integral

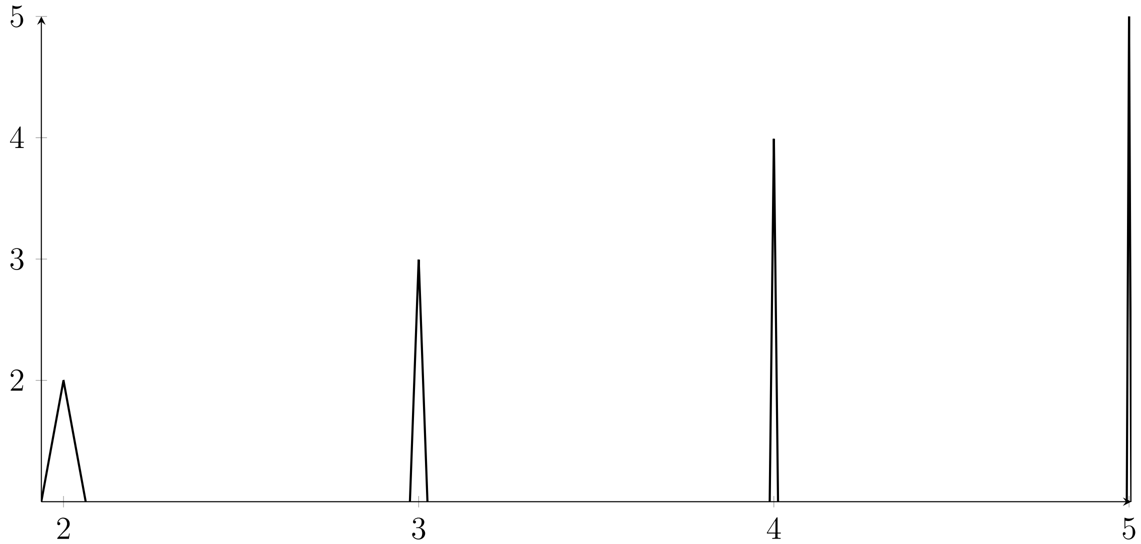
$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Supstitucijom $y = 1 - x$ integral postaje:

$$\int_0^1 y^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{y^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_0^1 & \alpha \neq 1 \\ \ln y\Big|_0^1 = +\infty, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Dakle, gornji izraz je konačan ako i samo ako je $\alpha + 1 < 0$, tj. ako i samo ako je $\alpha < 1$.

(b) Postoji. Skica rješenja:



Navedena funkcija može se zapisati formulom kao:

$$f(x) = \begin{cases} n - |n^4(x-n)|, & x \in [n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}],\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Očito je $f(n) = n$, dok je integral jednak sumi površina trokuta sa bazom veličine $2/n^3$ i visine n, što je jednako $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Budući da je funkcija $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ padajuća, iz usporednog kriterija sa integralom $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 < \infty$ slijedi da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Zadatak 4. (26 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju reda:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^2(\ln n)}.$$

(b) Odredite sumu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \cdot n!}.$$

Rješenje.

(a) Prirodna domena funkcije $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln^2(\ln x)}$ je $\langle 1, e\rangle \cup \langle e, +\infty\rangle$, na kojoj je neprekidna. Vidimo da je f padajuća na $\langle e, +\infty\rangle$ kao produkt pozitivnih rastućih funkcija u nazivniku ($x \mapsto x$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \ln^2(\ln x)$), gdje je $x \mapsto \ln^2(\ln x)$ rastuća kao kompozicija rastućih funkcija $\langle e, +\infty\rangle \ni x \mapsto \ln x \in \langle 1, +\infty\rangle$, $\langle 1, +\infty\rangle \ni x \mapsto \ln x \in \langle 0, +\infty\rangle$, $\langle 0, +\infty\rangle \ni x \mapsto x^2 \in \langle 0, +\infty\rangle$.

$$\begin{aligned}
\int_3^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln^2(\ln x)} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_3^{\xi} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln^2(\ln x)} = \begin{bmatrix} t = \ln x & 3 \mapsto \ln 3 \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & \xi \mapsto \ln \xi \end{bmatrix} \\
&= \lim_{\xi \to +\infty} \int_{\ln 3}^{\ln \xi} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^2(t)} = \begin{bmatrix} s = \ln t & \ln 3 \mapsto \ln\ln 3 \\ \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}t}{t} & \ln \xi \mapsto \ln\ln \xi \end{bmatrix} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_{\ln\ln 3}^{\ln\ln \xi} \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{-1}{s} \Bigg|_{\ln\ln 3}^{\ln\ln \xi} \\
&= \lim_{\xi \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln\ln 3} - \frac{1}{\ln\ln \xi} \right) = \frac{1}{\ln\ln 3}
\end{aligned}$$

Prema Cauchyevom integralnom kriteriju, red $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^2(\ln n)}$ konvergira, čime i $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^2(\ln n)}$ konvergira.

(b)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^x t e^t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = t & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^t\,\mathrm{d}t & v = e^t \end{bmatrix} = t e^t \Big|_0^x - \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = x e^x - e^t \Big|_0^x = x e^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1$$

$$(x-1)e^x + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2) \cdot n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \cdot n!} = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$